HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 29.01.2007 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 13 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Wir betrachten über dem Körper $K := \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_p[Y]) = \mathbb{F}_p(Y)$ das Polynom $f(X) = X^p - Y \in K[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $f \in K[X]$ irreduzibel ist.

b) Es sei $E := K[X]/(f)$. Zeigen Sie, dass E inseparabel über K ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper, $I := \{f \in K[X] \mid \deg(f) \geq 1\}$ die Menge der nicht-konstanten Polynome in einer Variablen über K und $\mathfrak{X} := (X_f)_{f \in I}$ ein durch I indiziertes Variablensystem. Wir bezeichnen den zugehörigen Polynomring mit unendlich vielen Variablen mit $K[\mathfrak{X}]$.

a) Wir definieren $\mathfrak{a} := (f(X_f) \mid f \in I) \subseteq K[\mathfrak{X}]$ als das durch die Familie der nicht-konstanten Polynome f erzeugte Ideal.

   Zeigen Sie: $\mathfrak{a}$ ist ein echtes Ideal in $K[\mathfrak{X}]$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq K[\mathfrak{X}]$ gibt, das $\mathfrak{a}$ enthält.

c) Beweisen Sie, dass der Körper $L_1 := K[\mathfrak{X}]/\mathfrak{m}$ eine algebraische Erweiterung von K ist, über der jedes Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle besitzt.

d) Durch Iteration dieses Verfahrens erhalten wir eine aufsteigende Kette $K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \ldots$ von Körpern. Zeigen Sie, dass $L := \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ ein algebraischer Abschluss von K ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten den Körper $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

a) Zeigen Sie, dass L Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist.

b) Es sei $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\varphi : L \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ und deren Bilder.

c) Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$ und die Automorphismen von L, die $\mathbb{Q}$ elementweise fest lassen.

d) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$ ist.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es seien p eine Primzahl und $L := \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_p[X, Y]) = \mathbb{F}_p(X, Y)$ der Funktionenkörper in zwei Variablen über $\mathbb{F}_p$. Es bezeichne $\mathrm{Frob}_p : L \longrightarrow L$ den durch $\mathrm{Frob}_p(\alpha) := \alpha^p$ $(\alpha \in L)$ gegebenen Frobenius-Endomorphismus und es sei $K := \mathrm{im}(\mathrm{Frob}_p)$.
Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $L \supseteq K$ nicht einfach algebraisch ist.