Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I
Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.02.2007 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 14 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper und $f \in K[X]$. Ein Zerfällungskörper E von f ist eine minimale (endliche) Erweiterung E/K, die sämtliche Nullstellen von f enthält.

a) Zeigen Sie, dass ein Zerfällungskörper E von f bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

b) Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 0$).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei E der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^6 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Bestimmen Sie E und berechnen Sie die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.

c) Bestimmen Sie für jede Untergruppe $H \subseteq G$ den nach dem Hauptsatz der Galoistheorie zu H existierenden Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq E$.

d) Stellen Sie das System der Körpererweiterungen in einem Diagramm dar! Welche der Körpererweiterungen sind normal?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien K ein Körper, $X_1, \ldots, X_n$ Variable und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die elementarsymmetrischen Funktionen in $X_1, \ldots, X_n$.

a) Beweisen Sie, dass $K(X_1, \ldots, X_n)$ eine Galoiserweiterung von $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ist, dessen Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist.

b) Betrachten Sie das Polynom

$$f(T) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} \pm \ldots + (-1)^n \sigma_n = (T - X_1) \cdot \ldots \cdot (T - X_n) \in K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)[T].$$

Die Diskriminante Δ von f ist definiert durch

$$\Delta = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (X_i - X_j).$$

Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n nach dem Hauptsatz der Galoistheorie dem Körper $K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\sqrt{\Delta})/K(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ entspricht.