Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.02.2007 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Bonusserie (0 + 100 Punkte)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Wir definieren die Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ der konstruierbaren komplexen Zahlen wie folgt: Eine komplexe Zahl $\alpha \in \mathbb{C}$ – aufgefasst als Punkt der Gaußschen Zahlenebene – heißt konstruierbar, wenn er ausgehend von Punkten aus $\mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{C}$ mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Dies bedeutet: Durch zwei in dieser Weise konstruierte Punkte darf mit dem Lineal eine Gerade gezogen oder mit Zirkel ein Kreisbogen um einen Punkt durch den anderen geschlagen werden. Schnittpunkte dieser Geraden und Kreise gelten dann ebenfalls als konstruiert.

a) Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$, und es existiere eine Kette von Körpern $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n = K(\alpha)$ mit $[K_j : K_{j-1}] = 2$ $(j = 1, \ldots, n)$. Zeigen Sie, dass dann α konstruierbar ist.

b) Sei nun umgekehrt $\alpha \in \mathbb{C}$ konstruierbar. Beweisen Sie: Es gibt eine Kette von Körpern $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n = K(\alpha)$ mit $[K_j : K_{j-1}] = 2$ $(j = 1, \ldots, n)$.

c) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, jeden beliebigen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu zerlegen.

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Beweisen Sie, dass ein regelmäßiges n-Eck genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, wenn $n = 2^m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, wobei $p_1, \ldots, p_r$ Fermatsche Primzahlen, d.h. von der Form $p_j = 2^{2^{k_j}} + 1$, $(j = 1, \ldots, r)$ sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Das homomorphe Bild einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

Wiederholungsaufgaben für die Klausur:

Aufgabe W1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Homomorphismen $\varphi : S_3 \longrightarrow (\mathbb{C}^\times, \cdot)$.

Aufgabe W2 (5 Punkte)

Es seien A, B abelsche Gruppen. Zeigen Sie:
Für jeden injektiven Homomorphismus $\iota : A \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ und jeden Homomorphismus $\varphi : A \longrightarrow B$ gibt es einen Homomorphismus $\psi : (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow B$ mit $\psi \circ \iota = \varphi$.
Gilt dies auch für $(\mathbb{Z}, +)$ anstelle von $(\mathbb{Q}, +)$?

Aufgabe W3 (5 Punkte)

Finden Sie alle ganzen Zahlen n, die bei Division durch $6, 5, 4, 3$ jeweils die Reste $5, 4, 3, 2$ (respektive) lassen.

Aufgabe W4 (5 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Die Gruppe H habe folgende Eigenschaft:
Es gibt einen Homomorphismus $\pi : G \longrightarrow H$ mit $\ker(\pi) = N$, so dass für alle Homomorphismen $\varphi : G \longrightarrow G'$ mit $N \subseteq \ker \varphi$ genau ein Homomorphismus $\overline{\varphi} : H \longrightarrow G'$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$ existiert.
Zeigen Sie, dass dann $H \simeq G/N$ ist.

Aufgabe W5 (5 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring und $\varphi : R \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass R unendlich viele Maximalideale besitzt.

Aufgabe W6 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist isomorph zur Einheitengruppe eines kommutativen Rings.

Aufgabe W7 (5 Punkte)

Geben Sie drei Nullstellen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ des Polynoms $X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ an, so dass $\mathbb{Q}(\vartheta_1, \vartheta_2)$ und $\mathbb{Q}(\vartheta_1, \vartheta_3)$ nicht isomorph sind.

Aufgabe W8 (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Wenn Sie sich für falsch entscheiden, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
(+1 Punkt für richtige, -1 Punkt für falsche Lösung; die Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird allerdings mindestens auf 0 aufgerundet.)

a) Ein Integritätsbereich mit mindestens drei Elementen hat mindestens zwei verschiedene Einheiten.

b) Es seien R und S Ringe, $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein Maximalideal. Dann ist auch $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein Maximalideal.

c) Jeder kommutative Ring mit Einselement enthält einen Körper.

d) Es sei G eine Gruppe. Wenn alle Sylowuntergruppen von G abelsch sind, dann ist auch G abelsch.

e) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow H$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann ist das Bild einer p-Sylowuntergruppe von G eine p-Sylowuntergruppe von H

f) Es seien R ein Integritätsbereich, S ein Ring und $\varphi : R \longrightarrow S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Dann ist auch S ein Integritätsbereich.

g) Es seien $N_1 \trianglelefteq G_1$ und $N_2 \trianglelefteq G_2$ Normalteiler. Wenn $N_1 \cong N_2$ und $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$, dann gilt $G_1 \cong G_2$.

h) Für alle $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\mathbb{R}[X]/(X^2 + p) \cong \mathbb{R}[X^2 + q]$.

i) Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung. Dann enthält K nur endlich viele Einheitswurzeln.

j) Jede endliche Gruppe ist Galoisgruppe einer Körpererweiterung.

Aufgabe W9 (5 Punkte)

Jede nicht-negative reelle Zahl besitzt eine Quadratwurzel. Folgern Sie daraus, dass der einzige Automorphismus von $\mathbb{R}$ die Identität ist.

Aufgabe W10 (10 Punkte)

Es seien $f(X) = X^4 + bX^2 + c \in K[X]$ und L der Zerfällungkörper von f. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ isomorph zu einer Untergruppe der Diedergruppe D_4 ist.