HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 06.11.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 3 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $\varphi : G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit dazugehöriger Projektion $\pi : G \longrightarrow G/N$.
Zeigen Sie: Es gibt genau dann einen Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/N \longrightarrow G'$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \varphi$, wenn $N \subseteq \ker(\varphi)$ gilt.
Ist $\overline{\varphi}$ eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es gibt vier 1-dimensionale Unterräume in $\mathbb{F}_3^2$. Durch die Multiplikationswirkung einer Matrix $A \in G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ werden diese Unterräume permutiert.

a) Man zeige: Diese Operation induziert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to S_4$.

b) Man bestimme $\ker(\varphi)$, $\mathrm{im}(\varphi)$ und die Ordnung von G.

c) Die Untergruppen $H, N \leq G$ seien wie folgt gegeben:

$$N = \{A \in G | \det(A) = 1, A^2 = \pm I_2\}, \quad H = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & b \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{F}_3, b \neq 0 \right\}$$

Man zeige: $G = HN$.

Hinweis: Verwenden Sie den ersten Isomorphiesatz.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Die freie Gruppe

Es sei X eine beliebige Menge von Zeichen. Als *von X erzeugte freie Halbgruppe* $W(X)$ bezeichnen wir die Menge aller Wörter mit Zeichen aus X. Mit dem Hintereinanderschreiben von Wörtern als Operation und dem leeren Wort als neutralem Element e bildet diese Menge ein Monoid.
Wir bezeichnen mit X^{-1} die Menge der Zeichen x^{-1}, wobei $x \in X$ ist. Wir führen auf $W(X \cup X^{-1})$ die Relationen $x^{-1}x \sim e$ und $xx^{-1} \sim e$ $(x \in X)$ ein.

a) Zeigen Sie, dass $F(X) := W(X \cup X^{-1})/\sim$ eine Gruppe ist.

Wir bezeichnen $F(X)$ als die *von X erzeugte freie Gruppe*.

b) Überlegen Sie sich, dass es für jede Gruppe G einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ mit einer geeigneten Menge X gibt. Folgern Sie, dass jede Gruppe isomorph zu $F(X)/N$ ist, wobei $N \trianglelefteq F(X)$ ein Normalteiler ist.

Ein Erzeugendensystem von N nennt man dann auch die *Relationen von G*.

c) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann endlich erzeugt ist, wenn es eine endliche Menge X und eine surjektive Abbildung $\varphi : F(X) \longrightarrow G$ gibt. Muss dann auch $\ker(\varphi)$ endlich erzeugt sein?

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. In eine Wand seien n Nägel (in beliebiger geometrischer Form, aber hinreichend hoch) eingeschlagen. Wie kann man an diesen Nägeln ein Bild (mittels einer ausreichend langen Schlaufe) so aufhängen, dass es herunterfällt, sobald ein beliebiger Nagel aus der Wand gezogen wird?
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3.