Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 13.11.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 4 (40+0 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Wir bezeichnen mit

$$G_x = \{g \in G | g \bullet x = x\}$$

die Stabilisator-Untergruppe von $x \in X$ in G und

$$X^g = \{x \in X | g \bullet x = x\}$$

die Fixpunktmenge von $g \in G$. Zeigen Sie:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Es sei p eine Primzahl. Klassifizieren Sie alle Gruppen der Ordnung $2p$.

b) Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung pq, wobei p, q Primzahlen mit $p < q$, $q \not\equiv 1 \mod p$ sind. Zeigen Sie, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe der Ordnung p^n für eine Primzahl p.

a) Zeigen Sie: Das Zentrum von G ist nicht-trivial.

b) Sei $n = 2$. Zeigen sie: G ist abelsch.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei

$$\mathrm{B}_n(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{F}_p \right\} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$$

die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie: $\mathrm{B}_n(\mathbb{F}_p)$ ist eine p-Sylow-Untergruppe in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.