Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I
Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 20.11.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 5 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 2000.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und A_{tor} bezeichne den Torsionsbestandteil von A, d.h. die Teilmenge aller Elemente endlicher Ordnung in A.

a) Zeigen Sie, dass A_{tor} eine endliche abelsche Untergruppe von A ist.

b) Beweisen Sie, dass die Faktorgruppe A/A_{tor} torsionsfrei ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Folgendes Diagramm von abelschen Gruppen und Gruppenhomomorphismen

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "h"] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "k"] & E \arrow[d, "l"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"] & B' \arrow[r, "\beta'"] & C' \arrow[r, "\gamma'"] & D' \arrow[r, "\delta'"] & E'
\end{tikzcd}$$

sei kommutativ und habe exakte Zeilen. Weiterhin seien g und k Isomorphismen, f sei surjektiv und l injektiv. Zeigen Sie: h ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es sei $\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\mathbb{Z}^n/\mathrm{im}(\varphi)$ eine endliche Gruppe ist.