HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 27.11.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 6 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei B eine abelsche Gruppe der Ordnung p^r (p Primzahl, $r \in \mathbb{N}_{>0}$). Dann besteht die Isomorphie

$$B \cong \mathbb{Z}/p^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{s_\ell}\mathbb{Z};$$

hierbei sind $s_1, \ldots, s_\ell$ natürliche Zahlen mit $s_1 + ... + s_\ell = r$, $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq s_\ell > 0$. Beweisen Sie, dass die Folge $(s_1, ..., s_\ell)$, d.h. der Typ von B, eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Gruppe $p \cdot B$ und wenden Sie vollständige Induktion an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei A die additive Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

a) Beweisen Sie, dass A eine Torsionsgruppe ist.

b) Beweisen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ genau eine Untergruppe der Ordnung n gibt. Zeigen Sie überdies, dass diese Untergruppe zyklisch ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei A eine endliche abelsche Gruppe. Wir definieren die *Charaktergruppe* $\widehat{A} := \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ als die Menge aller Gruppenhomomorphismen $\chi : A \to \mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie:

a) $\widehat{A}$ ist eine abelsche Gruppe.

b) Ist B eine weitere endliche abelsche Gruppe, so gilt $\widehat{A \oplus B} \cong \widehat{A} \oplus \widehat{B}$.

c) $A \cong \widehat{A}$.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Es sei A eine endliche abelsche Gruppe, p eine Primzahl und $A(p) \cong \mathbb{Z}/p^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{s_\ell}\mathbb{Z}$ die Zerlegung des p-Anteils von A wie in Aufgabe 1.

a) Zeigen Sie: Es gibt genau $p^\ell - 1$ Elemente der Ordnung p in A.

b) Benutzen Sie a), um die Struktur der Einheitengruppe eines endlichen Körpers zu bestimmen.