HU Berlin Wintersemester 2006/07

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 11.12.2006 nach der Vorlesung oder bis 11.00 Uhr, Sekretariat Prof. Kramer

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben, und
JEDES Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen!

Serie 8 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei G eine auflösbare Gruppe.
Zeigen Sie:
Jede Normalreihe von G besitzt eine Verfeinerung mit abelschen Faktoren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Wir definieren für eine natürliche Zahl $j \in \mathbb{N}$ den j-ten iterierten Kommutator $D^j(G)$ induktiv als

$$D^0(G) := G \quad \text{und} \quad D^{j+1}(G) := [D^j(G), D^j(G)].$$

Zeigen Sie:
Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $D^n(G) = \{e\}$ gibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_n für $n \geq 3$ von den 3-Zyklen erzeugt wird.

b) Beweisen Sie, dass für $n \geq 5$ gilt: $[A_n, A_n] = A_n$.
Hinweis: Verwenden Sie die Identität von 3-Zyklen

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_4)(x_1, x_3, x_5)(x_1, x_2, x_4)^{-1}(x_1, x_3, x_5)^{-1}.$$

c) Schließen Sie, dass A_n für $n \geq 5$ einfach ist.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Ein *Dodekaeder* ist ein platonischer Körper mit 20 Ecken, 30 Kanten und 12 regelmäßigen Fünfecken als Seiten. Als *Dodekaedergruppe* $D \leq \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ bezeichnen wird die Gruppe D der orientierungserhaltenden Symmetrien des Dodekaeders, d.h. die Gruppe der Drehungen, die den Dodekaeder in sich selbst überführen.

a) Bestimmen Sie die Ordnung von D.
Hinweis: Benutzen Sie die Bahnformel für die Operation von D auf den Seiten des Dodekaeders.

b) Zeigen Sie, dass D einfach ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Bahnformel für die Konjugation in D und beachten Sie, dass ein Normalteiler aus Konjugationsklassen bestehen muss.

c) Weisen Sie nach, dass D isomorph zu A_5 ist.
Hinweis: Benutzen Sie b) und die Operation von D auf der Menge der Würfel, die dem Dodekaeder einbeschrieben sind.