1. Baryzentrische Koordinaten

2. Algorithmus

3. Bernstein-Polynome

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i = \frac{n!}{i_1! i_2! i_3!} u_1^{i_1} u_2^{i_2} u_3^{i_3} \qquad |i| = n$$

$$b^n(u) = \sum_{|j|=n} b_j B_j^n(u)$$

4. Ableitungen

Definition. Sei x eine Fläche, $u = (u_1, u_2, u_3)$ die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes $u \in \mathbb{R}^2$, $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^2$ eine Richtung. Die Richtungsableitung $D_d x(u)$ von $x(u)$ in Richtung d ist definiert als

$$D_d x(u) \quad := \quad d_1 \frac{\partial}{\partial u_1} x(u) + d_2 \frac{\partial}{\partial u_2} x(u) + d_3 \frac{\partial}{\partial u_3} x(u).$$

Dies kann prägnanter in folgender Form geschrieben werden:

$$D_d x(u) = \sum_{|i|=1} \partial^i x(u) B_i^1(d),$$

wobei

$$\partial^i x(u) = \frac{\partial^{|i|}}{\partial u_1^{i_1} \partial u_2^{i_2} \partial u_3^{i_3}} x(u)$$

die partiellen Ableitungen von x sind.

Definition. Wir können ebenso höhere Ableitungen berechnen:

$$D_d^r x(u) = \sum_{|j|=r} \partial^j x(u) B_j^r(d) \tag{4.1}$$

Im 2-dimensionalen Fall erhalten wir erwartungsgemäß die Hesse-Matrix von x:

$$D_d^2 x \quad = \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_3} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial u_3} & \frac{\partial^2 x}{\partial u_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Zurück zum allgemeinen Fall: Die partiellen Ableitungen der Bernsteinpolynome sind

$$\partial^j B_i^n(u) \quad = \quad \frac{n!}{(n-r)!} B_{i-j}^{n-r}(u); \quad |j| = r \tag{4.2}$$

Somit können wir den Operator D_d^r auch auf Bernsteinpolynome anwenden, d.h. wir können (4.1) und (4.2) kombinieren und erhalten

$$D_d^r B_i^n(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} B_{i-j}^{n-r}(u) B_j^r(d)$$

Satz. *Damit sind wir in der Lage, die r-te Richtungsableitung eines Bezier-Dreiecks anzugeben:*

$$D_d^r b^n(u) \quad = \quad \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} b_j^{n-r}(u) B_j^r(d) \tag{4.3}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
D_d^r b^n(u) &= \sum_{|i|=n} b_i D_d^r B_j^r(d) \\
&= \sum_{|i|=n} b_i \cdot \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} B_{i-j}^{n-r}(u)\, B_j^r(d) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|i|=n-r} \sum_{|j|=r} b_{i+j} B_i^{n-r}(u)\, B_j^r(d) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} B_j^r(d) \sum_{|i|=n-r} b_{i+j} B_i^{n-r}(u) \\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=r} B_j^r(d)\, b_j^{n-r}
\end{aligned}$$

□

Analog (durch Vertauschung von u und d) ergibt sich

(4.4) $$D_d^r b^n(u) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=n-r} b_j^r(d)\, B_j^{n-r}(u)$$

Unter Benutzung von (4.4) erhalten wir für die Richtungsableitung im Eckpunkt $b_{(0,n,0)}$

$$D_d b_{(0,n,0)}^n = D_d b^n(0,1,0) = \frac{n!}{(n-1)!} \sum_{|j|=n-1} b_j^1(d)\, B_j^{n-1}(0,1,0)$$

Nun ist $B_j^{n-1}(0,1,0) = 0$, wenn $j_1 \neq 0$ oder $j_3 \neq 0$, und $B_{(0,n-1,0)}^{n-1}(0,1,0) = 1$. Damit folgt

$$D_d b_{(0,n,0)}^n = n\left(b_{(0,n-1,0)}^1(d)\, B_{(0,n-1,0)}^{n-1}(0,1,0)\right) = n\left(d_1 b_{(1,n-1,0)} + d_2 b_{(0,n,0)} + d_3 b_{(0,n-1,1)}\right),$$

die Tangentialfläche in den Eckpunkten wird also direkt vom Eckpunkt selbst und den benachbarten Punkten am Rand aufgespannt.

5. Spline-Flächen

Wir möchten nun Flächen untersuchen, die aus mehreren dreieckigen Flächen zusammengesetzt sind. Dazu werden wir Übergangsbedingungen zwischen den Teilflächen formulieren.

Betrachten wir zunächst eine Fläche, die aus zwei Dreiecks-Bezier-Flächen besteht. Die Grunddreiecke seien a, b, c und $\hat{a}, b, c$, d.h. die Dreiecke sind über die Kante bc verbunden. Der Punkt $\hat{a}$ kann dann durch baryzentrische Koordinaten von a, b, c ausgedrückt werden.

Sei nun b^n ein Bezier-Dreieck über der Grundfläche a, b, c und $\hat{b}^n$ ein Bezier-Dreieck über der Grundfläche $\hat{a}, b, c$. Für die Koordinaten u eines Punktes in a, b, c bezeichne $\hat{u}$ die Koordinaten dieses Punktes bzgl. $\hat{a}, b, c$.

Wir wollen nun die Übergangsbedingungen entlang des gemeinsamen Randes $u_1 = \hat{u}_1 = 0$ entwickeln. Hier gilt offensichtlich $u = \hat{u}$, denn für einen Punkte x auf der Strecke bc ist

$$\underbrace{u_1}_{0} \cdot a + u_2 \cdot b + u_3 \cdot c = x = \underbrace{\hat{u}_1}_{0} \cdot \hat{a} + \hat{u}_2 \cdot b + \hat{u}_3 \cdot c$$

Wegen $u_3 = 1 - u_2$, $\hat{u}_3 = 1 - \hat{u}_2$ folgt dann $u = \hat{u}$.

Zunächst sollen die Flächen C^0-stetig ineinander übergehen, d.h.

$$\begin{aligned} b^n(0,u_2,u_3) &= \hat{b}^n(0,u_2,u_3) \\ \Rightarrow \sum_{|j|=n} b_j B_j^n(u) &= \sum_{|j|=n} \hat{b}_j B_j^n(u) \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} b_{(0,k,n-k)} B_{(0,k,n-k)}^n(u) &= \sum_{|j|=n} \hat{b}_{(0,k,n-k)} B_{(0,k,n-k)}^n(u) \end{aligned}$$

Betrachtet man die Gleichungsseiten als Polynome in u, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$b_{(0,k,n-k)} = \hat{b}_{(0,k,n-k)} \quad \forall k = 0, \ldots n.$$

Allgemein müssen für C^r-Stetigkeit die Richtungsableitungen der beiden Flächen auf der Randlinie in Richtungen, die quer zur Randlinie verlaufen, übereinstimmen. Sei d eine Richtung bzgl. a, b, c und $\hat{d}$ die entsprechende Richtung bzgl. $\hat{a}, c, b$. Dann soll gelten:

$$\begin{aligned} D_d^r b^n(u)\big|_{u_1=0} &= D_{\hat{d}}^r \hat{b}^n(\hat{u})\Big|_{\hat{u}_1=0} \\ \Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=n-r} b_j^r(d)\, B_j^{n-r}(u)\Bigg|_{u_1=0} &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{|j|=n-r} \hat{b}_j^r\left(\hat{d}\right) B_j^{n-r}(\hat{u})\Bigg|_{\hat{u}_1=0} \\ \Rightarrow \sum_{|j|=n-r, j_1=0} b_j^r(d)\, B_j^{n-r}(0,u_2,1-u_2) &= \sum_{|j|=n-r, j_1=0} \hat{b}_j^r\left(\hat{d}\right) B_j^{n-r}(0,u_2,1-u_2) \end{aligned}$$

Betrachten man die letzte Zeile als Polynom in u_2, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$b_{(0,k,n-r-k)}^r(d) = \hat{b}_{(0,k,n-r-k)}^r\left(\hat{d}\right), \quad k = 0, \ldots, n-r$$

Nun ist b_j^r ein Polynom vom Grad r, welches durch ein Teilnetz von b_j aufgespannt wird. Dies gilt ebenso für $\hat{b}_j^r$. Nach der letzten Aussage müssen die Bezier-Dreiecke über diesen Teilnetzen dann übereinstimmen, wenn die Flächen C^r-stetig ineinander übergehen sollen.

6. Graderhöhung

Wir können ein Bezierdreieck b^n vom Grad n als ein Bezierdreieck vom Grad $n+1$ schreiben:

$$\sum_{|i|=n} b_i B_i^n(u) = \sum_{|i|=n+1} \tilde{b}_i B_i^{n+1}(u)$$

Die neuen Kontrollpunkte $\tilde{b}_i$ werden dabei durch

$$\tilde{b}_i = \frac{1}{n+1}\left[i_1 b_{i-(1,0,0)} + i_2 b_{i-(0,1,0)} + i_3 b_{i-(0,0,1)}\right]$$

bestimmt. Für einen Beweis multiplizieren wir die linke Seite der oberen Gleichung mit $1 = u_1 + u_2 + u_3$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{|i|=n} b_i B_i^n(u)(u_1+u_2+u_3) &= \sum_{|i|=n} b_i \frac{i_1+1}{n+1} B^{n+1}_{i+(1,0,0)}(u) + \sum_{|i|=n} b_i \frac{i_2+1}{n+1} B^{n+1}_{i+(0,1,0)}(u) \\
&\quad + \frac{i_3+1}{n+1} \sum_{|i|=n} b_i B^{n+1}_{i+(0,0,1)}(u) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{|i|=n+1, i_1=1} i_1 b_{i-(1,0,0)} B_i^{n+1}(u) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{|i|=n+1, i_2=1} i_2 b_{i-(0,1,0)} B_i^{n+1}(u) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \sum_{|i|=n+1, i_3=1} i_3 b_{i-(0,0,1)} B_i^{n+1}(u) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{|i|=n+1} \left[i_1 b_{i-(1,0,0)} + i_2 b_{i-(0,1,0)} + i_3 b_{i-(0,0,1)} \right] B_i^{n+1}(u) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{|i|=n+1} \tilde{b}_i B_i^{n+1}(u)
\end{aligned}$$

Graderhöhung wird also durch stückweise lineare Interpolation ausgeführt. Dadruch liegt das um ein Grad erhöhte Kontrollnetz innerhalb der konvexen Hülle des Originals.