1 Das lineare Optimierungsproblem in Gleichungsform

Überführung des LOP's

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i, i = 1, \ldots, m \\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} x_j = \tilde{b}_i, i = 1, \ldots, s \end{array} \right\}$$

in ein LOP in Gleichungsform:
Einführung von Schlupfvariablen $x_{n+i} := b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$, $i = 1, \ldots, m \ge 0$, $c_{n+i} = 0$ führt zu einem äquivalenten LOP:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1, \ldots, m & \\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} x_j = \tilde{b}_i, i = 1, \ldots, s & x_{n+i} \ge 0, i = 1, \ldots, m \end{array} \right\}$$

$x_j = x_j^+ - x_j^-$ mit $x_j^+, x_j^- \ge 0$ für $j = 1, \ldots, n$ führt zum äquivalenten LOP:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j^+ - c_j x_j^- \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j^+ - a_{i,j} x_j^- + x_{n+i} = b_i, i = 1, \ldots, m & x_j^+, x_j^- \ge 0, \; j = 1, \ldots n \\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} x_j^+ + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{i,j} x_j^- = \tilde{b}_i, i = 1, \ldots, s & x_{n+i} \ge 0, \; i = 1, \ldots, m \end{array} \right\}$$

Dies läßt sich nun durch Variablenumbenennungen auch in der Form $\min \{ \langle d, x \rangle | \, Ax = b, x \ge 0 \}$ schreiben.

Wir betrachten im folgenden das LOP:

$$\min \{ \langle c, x \rangle | \, Ax = b, x \ge 0 \}$$

mit $A \in R^{m \times n}$ und $c, x \in R^{,m}$. Sei außerdem $rg\,(\mathrm{A}) = n$ und $b \ge 0$. Diese Bedingungen lassen sich durch geeignete Umformungen immer erfüllen. Wegen $rg\,(A) = n$ ergibt sich zudem $m \ge n$.

Existenzsatz: Sei die Restriktionsmenge $M := \{ x \in R^n | \, Ax = b, x \ge 0 \}$ nichtleer und beschränkt. Dann nimmt die Zielfunktion $f(x) = \langle c, x \rangle$ ihr Minimum auf einer Ecke von M an.

Beweis:
Da M kompakt ist, nimmt die stetige Funktion f auf M ihr Minimum in einem Punkt $\tilde{x} \in M$ an. Da M ein beschränkter Polyeder ist, läßt sich $\tilde{x}$ als Linearkombination der Ecken $z^1, \ldots, z^r$ von M darstellen: $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z^i$ mit $\lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, r$ und $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.

$$\Rightarrow \; f(\tilde{x}) = \langle c, \tilde{x} \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left\langle c, z^i \right\rangle \ge \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \min_{j=1,\ldots,r} \left\langle c, z^j \right\rangle = \min_{j=1,\ldots,r} \left\langle c, z^j \right\rangle$$

Also ist $\min_{x \in M} f(x) = \min_{j=1,\ldots,r} \left\langle c, z^j \right\rangle$, d.h.

$$\exists j_0 \in \{1, \ldots, r\} : \min_{x \in M} f(x) = f\left(z^{j_0}\right)$$

q.e.d.

Def. Basispunkt: Sei $A = \left(a^1, \ldots, a^m\right)$. $x \in R^m$ heißt Basispunkt, falls Indizes $j_i \in \{1, \ldots, m\}, i = 1, \ldots, n$ existieren, so daß $B = \left(a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}\right)$ regulär ist, $Ax = \sum_{j=1}^{m} x_j a^j = \sum_{i=1}^{n} x_{j_i} a^{j_i} = b$ gilt und $x_k = 0 \, \forall k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j_1, \ldots, j_n\}$ ist.

Bezeichnung: $J_B(x) = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $J_N(x) = \{1, \ldots, m\} \setminus J_B(x)$.
Die x_{j_i} heißen Basisvariablen, die x_k, $k \in J_N(x)$ heißen Nichtbasisvariablen.

Satz: $x \in R^m$ ist genau dann eine Ecke von M, wenn x ein Basispunkt von M ist.

<u>Beweis:</u>
($\Rightarrow$) Sei $x^0 \in R^m$ eine Ecke von M. Dann existieren $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, m\}$, $r \leq m$, so daß für

$$N := \{x \in R^m | \, Ax = b, \, x_j = 0, j \in \{i_1, \ldots, i_r\}, x_j \geq 0, j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}\}$$

gilt: $x^0 \in N$ und $\dim N = 0$, also $N = \{x^0\}$ und $x_j^0 > 0$ für mindestens ein $j \in J(x) := \{j_1, \ldots, j_{m-r}\} := \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Annahme: $|J(x)| = m - r > n$

Sei $\tilde{A} := \left(a^{j_1}, \ldots, a^{j_{m-r}}\right) \in R^{m-r \times n}$. Dann folgt aus $rg(A) = n$, daß $rg\left(\tilde{A}\right) \leq n$.
Also hat die Lösung des Gleichungssys. $\tilde{A}\tilde{x} = b$ die Dimension $(m-r) - rg\tilde{A} > n - rg\tilde{A} \geq n - n = 0$.
Wegen $\left(x_{j_1}^0, \ldots, x_{j_{m-r}}^0\right)^T \geq 0$, $x^0 \neq 0$ und $\tilde{A}\left(x_{j_1}^0, \ldots, x_{j_{m-r}}^0\right)^T = b$ existiert dann ein $\tilde{x}^1 \in R^{m-r}$:

$$\tilde{A}\tilde{x}^1 = b, \quad \tilde{x}^1 \geq 0, \, \tilde{x}^1 \neq \tilde{x}^0.$$

Für x^1 mit $x_k^1 = \tilde{x}_i^1 \, \forall k \in J(x)$ und $x_k^1 = 0 \, \forall k \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ ist dann aber $Ax^1 = b$ und damit $x^1 \in N$.
Dies ist ein Widerspruch zu $\dim N = 0$.

Also ist $|J(x)| \leq n$. Dann läßt sich $J(x)$ so zu einer Menge

$$J_B(x) := \{j_1, \ldots, j_n\}$$

ergänzen, so daß die Matrix $B := \left(a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}\right)$ regulär ist und es gilt $B \cdot \left(x_{j_1}^0, \ldots, x_{j_n}^0\right)^T = b$, also ist x^0 ein Basispunkt von M.

($\Leftarrow$) Sei nun $x^0 \in R^m$ Basispunkt von M mit $J_B\left(x^0\right) = \{j_1, \ldots, j_n\}$, $B := \left(a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}\right)$ regulär und $x_k^0 = 0 \; \forall k \in J_N\left(x^0\right)$.
Dann ist

$$\begin{aligned} \{x \in R^m | \, Ax = b; \, x_{j_i} \geq 0, i = 1, \ldots, n; \, x_k = 0, k \in J_N(x)\} &= \\ \left\{x \in R^m | \, B\tilde{x} = b; \, \tilde{x} = \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\right)^T; \, x_k = 0, k \in J_N(x)\right\} &= \{x^0\} \end{aligned}$$

Also ist

$$\dim \{x \in R^m | \, Ax = b; \, x_j \geq 0, j \in J_B(x); \, x_k = 0, k \in J_N(x)\} = 0,$$

d.h. x^0 ist eine Ecke von M. q.e.d.

Def.: Eine Ecke x von M heißt entartet, falls $|\{j | \, x_j > 0\}| < n$.

Bezeichnung: Sei $\overline{x}$ Basispunkt von M mit $J_B(\overline{x}) = \{j_1, \ldots, j_n\}$ und $J_N(\overline{x}) = \{j_{n+1}, \ldots, j_m\}$.

Für $x \in R^m$ sei

$$x_B := \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}\right)^T \in R^n, \, x_N := \left(x_{j_{n+1}}, \ldots, x_{j_m}\right)^T \in R^{m-n}$$

Für $A \in R^{m \times n}$ sei

$$A_B := \left(a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}\right) \in R^{n \times n}, \, A_N := \left(a^{j_{n+1}}, \ldots, a^{j_m}\right) \in R^{(m-n) \times n}$$

Dann läßt sich das LOP in folgender Form schreiben:

$$\min \{\langle c_B, x_B \rangle + \langle c_N, x_N \rangle | \, A_B x_B + A_N x_N = b, x_B \geq 0, x_N \geq 0\}$$

Wegen A_B regulär, ist

$$\begin{aligned} x_B &= A_B^{-1}(b - A_N x_N), \\ \langle c_B, x_B \rangle &= \left\langle c_B, A_B^{-1}(b - A_N x_N)\right\rangle = \left\langle c_B, A_B^{-1} b\right\rangle + \left\langle c_B, -A_B^{-1} A_N x_N\right\rangle \\ &= \left\langle -\left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, x_N \right\rangle + \left\langle c_B, A_B^{-1} b\right\rangle \end{aligned}$$

Damit hat das LOP die Form:

$$\min \left\{ \left\langle c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, x_N \right\rangle + \left\langle c_B, A_B^{-1} b\right\rangle \middle| A_B^{-1}(b - A_N x_N) \geq 0, x_N \geq 0. \right\} \qquad (*)$$

Für $\overline{x}$ ist: $\overline{x}_N = 0$ und $\overline{x}_B = A_B^{-1} b \geq 0$.

Lemma: Sei $\overline{x} \in R^n$ Basispunkt von M. Wenn ein $k \in J_N(\overline{x})$ mit $\left\langle c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, e^k \right\rangle < 0$ und $\left(A_B^{-1} A_N\right) e^k \leq 0$ existiert, so ist die Zielfunktion nach unten unbeschränkt, das LOP also nicht lösbar.

Beweis:
Sei $x_N = re^k$, $r \geq 0$. Dann ist

$$A_B^{-1}(b - A_N x_N) = A_B^{-1} b - r\left(A_B^{-1} A_N e^k\right) \geq 0 \ \forall r \geq 0,$$

also liegt der zu x_N gehörige Punkt x in M $\forall r \geq 0$. Für die Zielfunktion gilt dann

$$\left\langle c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, r \cdot e^k \right\rangle = r \left\langle c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, e^k \right\rangle < 0.$$

Wegen $r \geq 0$ beliebig ist die Zielfunktion dann nach unten unbeschränkt. q.e.d.

Lemma: Das LOP sei lösbar, $\overline{x}$ ein Basispunkt von M und das LOP auf die Form $(*)$ reduziert. Gilt $c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B \geq 0$, so ist $\overline{x}_N$ eine Lösung von $(*)$ und $\overline{x}$ eine Lösung des ursprünlichen LOP's.

Beweis:
Für alle $x_N \geq 0$ ist $\left\langle c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B, x_N \right\rangle \geq 0$. Also ist $\overline{x}_N = 0$ eine Lösung von $(*)$.
Dies ergibt dann, daß $\overline{x}$ eine Lösung des ursprünglichen LOP's ist. q.e.d.

2 Das Simplex-Verfahren

Sei das LOP $\min\{\langle c, x\rangle | Ax = b, x \geq 0\}$ mit $rg(A) = n$ und $b \geq 0$ gegeben und lösbar. Sei $\overline{x}$ ein zulässiger Basispunkt, aber kein optimaler Punkt.

Aus dem Lemma folgt dann, daß ein $k \in J_N(\overline{x})$ existiert, so daß:

$$\left(c_N - \left(A_B^{-1} A_N\right)^T c_B\right)_k < 0$$

Wir definieren eine Richtung $\overline{d} \in R^m$ durch

$$\overline{d}_B = -A_B^{-1} A_N e^k, \quad \overline{d}_N = e^k$$

und eine Schrittweite $\overline{t} := \max\left\{t \geq 0 | \overline{x} + t\overline{d} \in M\right\}$.

Lemma (Austausch von Basisvariablen): $\overline{x}+\overline{t}\overline{d}$ ist eine Ecke von M,

$$\begin{aligned}
\overline{t} &= \min\left\{ \frac{\left[A_B^{-1}b\right]_{j_i}}{\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i}} \,\middle|\, \left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i} > 0, i=1,\dots,n \right\}, \\
J_B\left(\overline{x}+\overline{t}\overline{d}\right) &= \left(J_B\left(\overline{x}\right)\setminus\{j_{i_0}\}\right)\cup\{k\}, \\
J_N\left(\overline{x}+\overline{t}\overline{d}\right) &= \left(J_N\left(\overline{x}\right)\setminus\{k\}\right)\cup\{j_{i_0}\}
\end{aligned}$$

wobei $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ ein Index ist, an dem das Minimum bei der Bestimmung von $\overline{t}$ angenommen wird.

Beweis:
Da das LOP lösbar ist, existiert nach dem Lemma zur Lösbarkeit des LOP's mindestens ein j_i, so daß $\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i} > 0$, also existiert $\overline{t}$. Sei

$$x(t) := \overline{x}+t\overline{d}.$$

Dann ist zu zeigen:

$$x(t)\in M \;\Rightarrow\; 0\le t\le \overline{t}.$$

Es ist $A\overline{d} = -A_B A_B^{-1}A_N e^k + A_N e^k = 0$ und damit $A\left(\overline{x}+t\overline{d}\right) = A\overline{x} = b\,\forall t\ge 0$.

$$\begin{aligned}
x_N(t) &= \overline{x}_N + t\overline{d}_N = 0 + te^k \ge 0 \quad \forall t\ge 0 \\
x_B(t) &= \overline{x}_B + t\overline{d}_B = A_B^{-1}b + t\left(-A_B^{-1}A_N e^k\right)
\end{aligned}$$

Aus $x(t)\in M$ folgt $x_{j_i}(t)\ge 0$, $i=1,\dots,n$.
Im Falle $\left(A_B^{-1}A_N e^k\right)_{j_i}\le 0$ ist dann $x_{j_i}(t)\ge 0\,\forall t\ge 0$.
Im Falle $\left(A_B^{-1}A_N e^k\right)_{j_i} > 0$ ist $x_{j_i}(t) = \left[A_B^{-1}b - t\left(A_B^{-1}A_N e^k\right)\right]_{j_i}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\left[A_B^{-1}b\right]_{j_i}}{\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i}}\ge t$.
Also ist

$$\begin{aligned}
x_B(t)\ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0\le t\le \min\left\{ \frac{\left[A_B^{-1}b\right]_{j_i}}{\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i}} \,\middle|\, \left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_i} > 0, i=1,\dots,n \right\} = \overline{t}, \\
x_N(t)\ge 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0\le t.
\end{aligned}$$

Wegen $x_i\left(\overline{t}\right) = \left[\overline{t}e^k\right]_i = 0\,\forall i\in J_N\left(\overline{x}\right)\setminus\{k\}$ und $x_k\left(\overline{t}\right) = \overline{t}\ge 0$ muß der Index k von $J_N\left(\overline{x}\right)$ nach $J_B\left(\overline{x}+\overline{t}\overline{d}\right)$ wechseln.
Wegen $x_{j_{i_0}}\left(\overline{t}\right) = \left[A_B^{-1}b - \overline{t}\left(A_B^{-1}A_N e^k\right)\right]_{j_{i_0}} = \left[A_B^{-1}b\right]_{j_{i_0}} - \frac{\left[A_B^{-1}A_N\right]_{j_{i_0}}}{\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_{i_0}}}\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_{i_0}} = 0$, kann j_{i_0} von $J_B\left(\overline{x}\right)$ nach $J_N\left(\overline{x}+\overline{t}\overline{d}\right)$ wechseln.

Bleibt zu zeigen: $\overline{x}+\overline{t}\overline{d}$ ist eine Ecke.
Da $\overline{t}$ sein Minimum am Index i_0 annimmt, ist $0 < \left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_{j_{i_0}} = \left[A_B^{-1}a^k\right]_{j_{i_0}}$.
Für das $x\in R^n$ mit $A_B x = a^k$ gilt also $x_{j_{i_0}} > 0$, also läßt sich a^k nicht als Linearkombination der $\left\{a^{j_1},\dots,a^{j_n}\right\}\setminus\left\{a^{j_{i_0}}\right\}$ darstellen. Also ist die Matrix $\left(a^{j_1},\dots,a^{j_{i_0-1}},a^k,a^{j_{i_0+1}},\dots,a^{j_n}\right)$ regulär und $\overline{x}+\overline{t}\overline{d}$ eine Basisvariable von M. q.e.d.

Algorithmus:

(i) Bestimme eine Ecke x^0 von M, $l:=0$

(ii) Berechne $J_B\left(x^l\right), J_N\left(x^l\right)$. Wenn $c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\ge 0$, dann ist x^l Lösung des LOP.

(iii) Wähle $k\in J_N\left(x^l\right)$ mit $\left(c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\right)_k < 0$. Bestimme $\overline{d}$, $\overline{t}$, $J_B\left(x^l+\overline{t}\overline{d}\right)$, $J_N\left(x^l+\overline{t}\overline{d}\right)$.

(iv) $x^{l+1} := x^l + \overline{t}\overline{d}$, $l:=l+1$, weiter bei (ii).

Satz: Seien alle Ecken nicht entartet. Dann bricht das Simplex-Verfahren nach einer endlichen Anzahl l_* von Schritten ab, x^{l_*} ist Lösung des LOP's und $\langle c, x^{l+1}\rangle < \langle c, x^l\rangle \; \forall\, l = 0, \ldots, l_* - 1$.

Beweis:
Nach dem Lemma sind alle x^l Ecken. Da x^l nichtentartet ist, ist $x_j^l = \left[A_B^{-1}b\right]_j > 0 \; \forall j \in J_B\left(x^l\right)$. Daraus folgt $\bar{t} > 0$.

$$\begin{aligned}
\langle c, x^{l+1}\rangle &= \langle c, x^l\rangle + \bar{t}\,\langle c_B, \overline{d_B}\rangle + \bar{t}\,\langle c_N, \bar{d}_N\rangle \\
&= \langle c, x^l\rangle + \bar{t}\,\langle c_N, e^k\rangle + \bar{t}\,\langle c_B, -A_B^{-1}A_N e^k\rangle \\
&= \langle c, x^l\rangle + \bar{t}\left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, e^k\right\rangle \\
&< \langle c, x^l\rangle
\end{aligned}$$

Da die Werte der Zielfunktion also streng monoton fallend sind, kann keine Ecke mehrfach auftreten. Da die Anzahl der Ecken von M außerdem endlich ist, bricht das Verfahren nach einer endlichen Zahl von Schritten ab. q.e.d.

Satz: Wenn das $(LOP)^*$: $\min\left\{\sum_{i=1}^m u_r \,|\, Ax + u = b,\, x \geq 0,\, u \geq 0\right\}$ eine Lösung größer 0 besitzt, so besitzt das ursprüngliche LOP $\min\left\{\langle c, x\rangle \,|\, Ax = b,\, x \geq 0\right\}$ keinen zulässigen Basispunkt, also auch keinen optimalen Punkt.

Beweis:
Annahme: Die Lösung von $(LOP)^*$ ist größer 0 und es existiert ein zulässiger Basispunkt x^0 von LOP. Dann ist $\left(x^0, \hat{u}\right)$ mit $\hat{u} = 0$ optimal für $(LOP)^*$ und dies ein Widerspruch zur Vorraussetzung, daß das $(LOP)^*$ eine Lösung größer 0 besitzt. q.e.d.

Folgerung: Dieser Satz liefert uns ein Kriterium für die Existenz eines Basispunktes für das LOP, denn für $(LOP)^*$ ist $(x, u) = (0, b)$ ein Basispunkt und die Lösung von $(LOP)^*$ liefert uns dann einen Basispunkt von LOP oder die Aussage, daß ein solcher Punkt nicht existiert.

Am folgenden Schema läßt sich der Algorithmus auch per Hand praktisch durchführen:

		Basisvariablen	Nichtbasisvariablen	
		0	c_N	
c_B	BV	I_n	$A_B^{-1}A_N$	$A_B^{-1}b$
		0	$c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B$	

3 Die Entartung

Sei das LOP: $\min\left\{\langle c, x\rangle \,|\, Ax = b,\, x \geq 0\right\}$ gegeben, habe A maximalen Rang n und sei $b \geq 0$.

Sei $\varepsilon \in R^m, \varepsilon > 0$ und

$$(LOP)_\varepsilon : \min\left\{\langle c, \tilde{x}\rangle \,|\, A\tilde{x} = b + A\varepsilon, \tilde{x} \geq 0\right\}.$$

Für einen Basispunkt $\bar{x}$ von LOP gilt $\overline{x_B} = A_B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0$. Dann ist $\bar{\tilde{x}}$ mit

$$\bar{\tilde{x}}_B = A_B^{-1}b + \varepsilon_B + A_B^{-1}A_N\varepsilon_N, \quad \bar{\tilde{x}}_N = 0$$

ein Basispunkt von $(LOP)_\varepsilon$.

Für $\tilde{x} \geq 0$ mit $A\tilde{x} = b + A\varepsilon$ gilt dann: $A_B\tilde{x}_B + A_N\tilde{x}_N = b + A_B\varepsilon_B + A_N\varepsilon_N$, also

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1}b + \varepsilon_B - A_B^{-1}A_N\varepsilon_N - A_B^{-1}A_N\tilde{x}_N$$

und für die Zielfunktion ergibt sich:

$$\langle c, \tilde{x} \rangle = \langle c_B, \tilde{x}_B \rangle + \langle c_N, \tilde{x}_N \rangle = \left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, \tilde{x}_N \right\rangle + \left\langle c_B, A_B^{-1}b + \varepsilon_B - A_B^{-1}A_N\varepsilon_N \right\rangle$$

Also läßt sich $(LOP)_\varepsilon$ in der Form

$$\min \left\{ \left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, \tilde{x}_N \right\rangle + \left\langle c_B, A_B^{-1}\left(b - A_N\varepsilon_N\right) + \varepsilon_B \right\rangle \middle| A_B^{-1}\left(b - A_N\varepsilon_N - A_N\tilde{x}_N\right) + \varepsilon_B \geq 0, \tilde{x}_N \geq 0 \right\}$$

schreiben. Damit hat das Schema für den Simplex-Algorithmus zur Berechnung vom $(LOP)_\varepsilon$ folgende Form, in der sich nur die letzte Spalte von dem Schema für LOP unterscheidet:

		Basisvariablen	Nichtbasisvariablen	
		0	c_N	
c_B	BV	I_n	$A_B^{-1}A_N$	$A_B^{-1}\left(b + A_N\varepsilon_N + A_B\varepsilon_B\right)$
		0	$c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B$	

Lemma: Es existiert ein $\overline{\varepsilon} > 0$, so daß $\forall 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ $(LOP)_\varepsilon$ keine Entartung besitzt.

Beweis:
Falls die Ecke $\overline{x}$ in LOP entartet ist, dann äußert sich dies gerade darin, daß $\left(A_B^{-1}b\right)_i = 0$ für ein $i \in J_B\left(\overline{x}\right)$ ist.

Es existiert nun ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, so daß $\forall\, 0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon} :\ A_B^{-1}\left(b + A_N\varepsilon_N + A_B\varepsilon_B\right) > 0$, d.h. in $(LOP)_\varepsilon$ ist die zu $\overline{x}$ gehörige Ecke nicht entartet.

Sei $R_{\tilde{\varepsilon}} := \left\{ x \in R^m | \, x \text{ ist Basispunkt von } (\text{LOP})_{\tilde{\varepsilon}} \right\} = \left\{ \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k \right\}$. Dann existiert zu jedem $\tilde{x}_k$ ein $\tilde{\varepsilon}_k > 0$, so daß $\forall 0 < \varepsilon_k < \tilde{\varepsilon}_k$ die zu $\tilde{x}_k$ in $(LOP)_{\varepsilon_k}$ gehörige Ecke keine Entartung besitzt.

Sei $\overline{\varepsilon} := \min\left\{\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_k\right\} > 0$. Dann besitzen die $(LOP)_\varepsilon$ keine Entartung $\forall 0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ und das Problem ist mit dem in 2. angegebenen Algorithmus lösbar, falls LOP lösbar war. q.e.d.

Satz: Wenn $\tilde{x}_\varepsilon^0$ ein optimaler Basispunkt von $(LOP)_\varepsilon$ ist, so ist $x^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{x}_\varepsilon^0$ ein optimaler Basispunkt von LOP.

Beweis:

$$\forall i \in J_B\left(\tilde{x}_\varepsilon^0\right) :\ \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\tilde{x}_\varepsilon^0\right)_i = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[A_B^{-1}\left(b + A_N\varepsilon_N + A_B\varepsilon_B\right)\right]_i = \left[A_B^{-1}b\right]_i,\ \tilde{x}_{\varepsilon_N}^0 = 0$$

$$x^0 := \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{x}_\varepsilon^0.$$

Bleibt zu zeigen: x^0 ist optimal für LOP.
Da $\tilde{x}_\varepsilon^0$ für $(LOP)_\varepsilon$ ein optimaler Basispunkt ist, gilt $\forall \tilde{x}_\varepsilon$ aus der Restriktionsmenge von $(LOP)_\varepsilon$: $\langle c, \tilde{x}_\varepsilon \rangle - \left\langle c, \tilde{x}_\varepsilon^0 \right\rangle \geq 0$, d.h.

$$\left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, \tilde{x}_{\varepsilon_N} \right\rangle \geq 0.$$

Sei $k \in J_N\left(\tilde{x}_\varepsilon^0\right)$, $x_N(t) = te^k$ und $x_B(t) = \tilde{x}_{\varepsilon_B}^0 - A_B^{-1}A_N x_N(t)$. Dann ist

$$x_i(t) = \tilde{x}_{\varepsilon_i} - t\left[A_B^{-1}A_N e^k\right]_i \ \forall i \in J_B\left(\tilde{x}_\varepsilon\right).$$

Da $\forall 0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon} :\ \tilde{x}_{\varepsilon_B}^0 > 0$, existiert ein t_0, so daß $\forall t \leq t_0 :\ x(t)$ liegt im Restriktionsbereich von $(LOP)_\varepsilon$ und damit ergibt sich:

$$\left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, x_N(t) \right\rangle = \left(c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\right)_k \cdot t \geq 0.$$

Da $k \in J_N(t)$ beliebig ist, folgt damit $c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B \geq 0$, also ist nach dem letzten Lemma aus 1. x^0 ein optimaler Punkt für das LOP. q.e.d.

Satz: Sei das LOP lösbar, dann hat $(LOP)_\varepsilon$ einen optimalen Punkt x^0_ε, für den $x^0 = \lim_{\varepsilon\to 0} x^0_\varepsilon$ ein optimaler Punkt für LOP ist.

Beweis:
Annahme: Das $(LOP)_\varepsilon$ ist unlösbar. Dann ist die Zielfunktion auf dem Restriktionsbereich M_ε von $(LOP)_\varepsilon$ nach unten unbeschränkt, es existiert also eine Ecke $\overline{x}_\varepsilon$ von M_ε, so daß mindestens eine von ihr ausgehende Kante eine Halbgerade darstellt, auf der die Zielfunktion unbeschränkt abnimmt.
Da $(LOP)_\varepsilon$ nicht entartet ist, gilt zudem

$$\overline{x}_{\varepsilon_B} = A_B^{-1}b + \varepsilon_B + A_B^{-1}A_N\varepsilon_N > 0,\ \overline{x}_{\varepsilon_N} = 0.$$

Sei $x_{\varepsilon_N} = t\cdot e^k$, $x_{\varepsilon_B} = A_B^{-1}b + \varepsilon_B + A_B^{-1}A_N\varepsilon_N - t\cdot A_B^{-1}A_Ne^k = \overline{x}_{\varepsilon_B} - t\cdot A_B^{-1}A_Ne^k$ $(t\geq 0)$ die Halbgerade in M_ε, auf der die Zielfunktion unbeschränkt abnimmt. Wegen $\overline{x}_{\varepsilon_B} > 0$ ist

$$A_B^{-1}A_Ne^k \leq 0\ (*)\,,$$

denn sonst wäre die Bedingung $x_{\varepsilon_B} > 0$ für $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$ nicht erfüllt.

Für die Zielfunktion ergibt sich

$$\langle c, x_\varepsilon\rangle = \left\langle c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B, x_{\varepsilon_N}\right\rangle + \langle c, \overline{x}_\varepsilon\rangle = \langle c, \overline{x}_\varepsilon\rangle + t\left(c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\right)_k$$

und da die Zielfunktion auf der Kante unbeschränkt abnimmt, ist

$$\left(c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\right)_k < 0\ (**)\,.$$

Der Punkt $\overline{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{x}_\varepsilon$ ist ein zulässiger Basispunkt für LOP mit $\overline{x}_B = A_B^{-1}b$.
Aus der Existenz eines k mit den Eigenschaften $(*)$ und $(**)$ folgt nun nach dem Lemma aus 1., daß das LOP nicht lösbar ist. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit existiert ein optimaler Punkt x^0_ε für $(LOP)_\varepsilon$ und es ist $x^0 := \lim_{\varepsilon\to 0} x^0_\varepsilon$ ein optimaler Punkt für das LOP. q.e.d.

Folgerung 1: Wenn das LOP keinen optimalen Punkt besitzt, dann hat $(LOP)_\varepsilon$ auch diese Eigenschaft und es existiert ein zulässiger Basispunkt $\overline{x}_\varepsilon$ mit den Eigenschaften $\exists k \in J_N(\overline{x}_\varepsilon)$: $\left(c_N - \left(A_B^{-1}A_N\right)^T c_B\right)_k < 0$ und $\left(A_B^{-1}A_N\right)e^k \leq 0$. Der Punkt $\overline{x} := \lim_\varepsilon \overline{x}_\varepsilon$ ist ein zulässiger Basispunkt für LOP mit denselben Eigenschaften, die auch $\overline{x}_\varepsilon$ besitzt.

Folgerung 2: Der Restriktionsbereich des $(LOP)_\varepsilon$ ist ein $(m-n)$-dimensionales Polyeder mit der Eigenschaft, das von jeder seiner Ecken genau $m-n$ Kanten ausgehen. Wenn $\overline{x}_\varepsilon$ eine Ecke des Polyeder ist, dann wird für jedes $k \in J_N(\overline{x}_\varepsilon)$ durch die Relationen $x_{\varepsilon_N} = t\cdot e^k$, $x_{\varepsilon_B} = \overline{x}_\varepsilon - t\cdot A_B^{-1}A_Ne^k$ eine von der Ecke $\overline{x}_\varepsilon$ ausgehende Kante des Polyeders beschrieben.

Satz: Ein Basispunkt $\overline{x}$ des LOP ist genau dann entartet, wenn sich kein $(m-n)$-dimensionales Simplex

$$K(\varepsilon) = \left\{ x \in R^m \,\middle|\, \sum_{i\in J_N(\overline{x})} x_i \leq \varepsilon,\ x_N \geq 0,\ x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \right\},\ \varepsilon \in R, \varepsilon > 0$$

im Restriktionsbereich M des LOP's einbeschreiben läßt.

Beweis:
$(\Rightarrow)$ Sei $\overline{x}$ entartet, sei also $\overline{x}_{i_0} = 0$ für ein $i_0 \in J_B(\overline{x})$ und sei k so gewählt, daß $\left[A_B^{-1}A_Ne^k\right]_{i_0} > 0$.

$$L_{m-n} := \left\{ x \in R^m \,|\, x_N \in R^{m-n},\ x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_Nx_N \right\}$$

ein linearer Unterraum des R^m. Dann läßt sich M in L_{m-n} beschreiben als

$$M = \left\{ x \in L_{m-n} |\, A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \geq 0, x_N \geq 0 \right\}.$$

Es ist zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0$: $K(\varepsilon) \not\subseteq M$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $x \in R^m$ mit $x_N = t \cdot e^k$, $t \in (0, \varepsilon)$ und $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$. Dann ist $x \in K(\varepsilon)$ und es ist

$$x_{i_0} = \left[A_B^{-1} b\right]_{i_0} - \left[\left(A_B^{-1} A_N\right) \cdot t e^k\right]_{i_0} = -t \cdot \left[A_B^{-1} A_N e^k\right]_{i_0} < 0,$$

also ist $x_B \not\geq 0$ und damit $x \notin M$.

($\Leftarrow$) Vor.: $\forall \varepsilon > 0 : K(\varepsilon) \not\subseteq M$

Beh.: $\exists k \in J_N(\overline{x}) : \forall \varepsilon > 0, x \in R^m$ mit $x_N = t \cdot e^k, x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N, t \in (0, \varepsilon) : x \notin M$.

Annahme:

$$\exists \tilde{\varepsilon} > 0 : \forall l_i \in J_N(\overline{x}) : x_N^{l_i} = \tilde{t}_{l_i} \cdot e^i,\, \tilde{t}_{l_i} \in (0, \tilde{\varepsilon}),\, x_B^{l_i} = A_B^{-1}\left(b - A_N x_N^l\right) : x^{l_i} \in M$$

Aus der Konvexität von M folgt dann, daß das abgeschlossene Simplex mit den Ecken $x^{l_0} := \overline{x}$, $x^{l_1}, \ldots, x^{l_{m-n}}$ in M liegt. Für die Punkte x in diesem Simplex gilt:

$$x_N = \sum_{i=0}^{m-n} \lambda_{l_i} x^{l_i} = \lambda_{l_0} \overline{x}_N + \sum_{i=1}^{m-n} \lambda_{l_i} \tilde{t}_{l_i} e^i$$

mit $0 \leq \lambda_{l_i}$, $\sum_{i=0}^{m-n} \lambda_{l_i} = 1$. Dies ergibt, daß der Punkt x genau dann im Simplex enthalten ist, wenn er den Ungleichungen

$$\begin{aligned} x^{l_i} = \lambda_{l_i} \cdot \tilde{t}_{l_i} &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m-n} \frac{x^{l_i}}{\tilde{t}_{l_i}} = \sum_{i=1}^{m-n} \lambda_{l_i} = 1 - \lambda_{l_0} &\leq 1 \end{aligned}$$

genügt.

Sei $\varepsilon_1 := \max_{i=1,\ldots,m-n} \tilde{t}_{l_i}$, dann ist

$$\sum_{i=1}^{m-n} \frac{x^{l_i}}{\varepsilon_1} \leq \sum_{i=1}^{m-n} \frac{x^{l_i}}{\tilde{t}_{l_i}} \leq 1,$$

also ist $K(\varepsilon_1)$ in dem Simplex erhalten, welches selbst in M enthalten ist, also ist $K(\varepsilon_1) \subseteq M$ und dies ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit existiert ein $k \in J_N(\overline{x})$, so daß

$$\forall \varepsilon > 0,\, x \in K(\varepsilon), x_N = t \cdot e^k, t \in (0, \varepsilon), x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N) : x \notin M.$$

Wegen $x_N \geq 0$ ist dann also $x_B < 0$, d.h.

$$\exists\, i_0 \in J_B(\overline{x}) : \left[A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right]_{i_0} < 0.$$

Dies führt zu

$$0 \leq \left[A_B^{-1} b\right]_{i_0} < t \cdot \left[A_B^{-1} A_N e^k\right]_{i_0} \; \forall t \in (0, \varepsilon).$$

Daraus ergibt sich nun $\left[A_B^{-1} b\right]_{i_0} = 0$ und $\left[A_B^{-1} A_N e^k\right]_{i_0} > 0$, also ist $\overline{x}$ entartet. q.e.d.

Literatur

[1] F. Nozicka, J. Guddat, H. Hollatz: Theorie der lineraren Optimierung, Akademie-Verlag Berlin, 1972

[2] Werner Römisch: Vorlesungsskript Wissenschaftliches Rechnen II, 2001, http://www-iam.mathematik.hu-berlin.de/~romisch/teaching/SS01.html

[3] Walter Schlee: Vorlesungsskript Unternehmensforschung 2000, http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m1/personen/schlee/vorlesung/ufoscript2000.pdf