Topologie I
C. Wendl

Humboldt-Universität zu Berlin
Sommersemester 2017

Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

Lehrpersonen: Prof. Chris Wendl (Vorlesung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
`wendl@math.hu-berlin.de`
Sprechstunde: Mittwochs 15:00–16:00

Dr. Felix Schmäschke (Übung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.303
`felix.schmaeschke@math.hu-berlin.de`
Sprechstunde: Mittwochs 14:00–15:00

Website: `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2017/Topologie1/`

Vorlesung: Mittwochs 9:00–11:00 in 1-0311 (Rudower Chaussee 26)
Donnerstags 9:00–11:00 in 1.115 (Rudower Chaussee 25)

Übung: Mittwochs 11:00–13:00 in 1.013 (Rudower Chaussee 25)

Sprache: Nach Wunsch der Hörer kann die Vorlesung auf Deutsch oder auf Englisch gehalten werden.

Voraussetzungen: Der Kurs basiert auf den HU-Vorlesungen *Analysis I* und *II*, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I* und *II*, sowie auf dem algebraischen Teil der Vorlesung *Algebra und Funktionentheorie*.

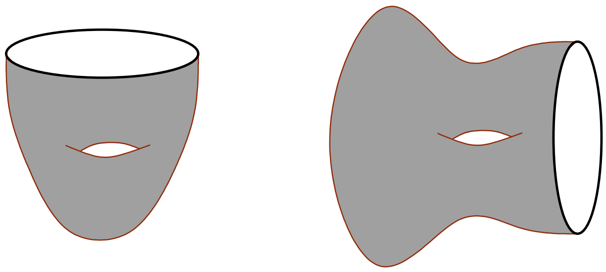
Die Studierenden sollten mit metrischen Räumen, in der Version wie sie im ersten Jahr eingeführt wurden, und mit den grundlegenden Eigenschaften von Gruppen, Ringen und Körpern vertraut sein.

Kurze Beschreibung

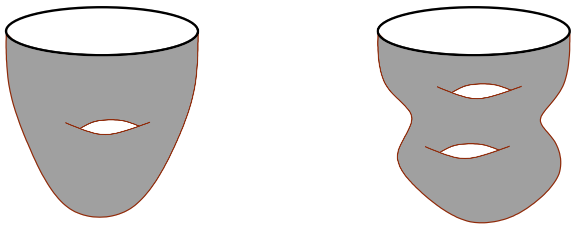
Der Kurs ist eine Einführung in die Topologie mit Hauptaugenmerk auf geometrischen Anwendungen. Zum ersten und zweiten Abschnitt gehören insbesondere die Begriffe: metrische und topologische Räume, Trennungsaxiome, Kompaktheit, zusammenhängende Räume, Fundamentalgruppen, Homotopieinvarianz, der Satz von Seifert-van-Kampen und Überlagerungen. Im dritten Teil werden wir uns grundlegenden Elementen der Differentialtopologie mit folgenden Inhalten widmen: topologische und glatte Mannigfaltigkeiten, wegzusammenhängende Räume, der Satz von Sard mit Andeutung seines Beweises und der Abbildungsgrad. Der vierte Teil ist eine Einleitung in Homologie- und Kohomologietheorie. Wir werden dabei Simplizialkomplexe, singuläre Homologie und Kohomologie, lange exakte Sequenzen, einfache Berrechnungen von Beispielen, den Brouwerschen Fixpunktsatz und, falls noch genügend Zeit bleibt, Zellkomplexe sowie zelluläre Homologie behandeln.

Ausführliche Beschreibung

Die Topologie bildet den natürlichen Rahmen für das Studium stetiger Abbildungen. Grundlegend sind dabei stetige Abbildungen mit stetigen Inversen (sog. Homöomorphismen) und man untersucht Eigenschaften, die durch solche Abbildungen erhalten bleiben. Mit anderen Worten, die Topologie betrachtet diese beiden Objekte als äquivalent:



aber diese als nicht äquivalent:



Ein wesentlicher Bestandteil der Topologie ist nun Methoden zu entwickeln, um zu beweisen, dass zwei Objekte nicht äquivalent sind.

Am Anfang des Kurses führen wir topologische Räume durch Axiome ein und erklären, wie man sie als Verallgemeinerung metrischer Räume verstehen kann. Wir werden zunächst die bekannten Begriffe der kompakten und zusammenhängenden Räume wiederentdecken, aber dann bald mit dem Trennungsaxiom (e.g. Hausdorffeigenschaft) in weniger vertraute Gefilde eintauchen. Dieser Abschnitt ist auch unter dem Namen „allgemeine Topologie“ oder „Punktmengentopologie“ bekannt. Auf diesem relativ abstrakten Niveau werden wir einige interessante pathogolosche Beispiele kennenlernen. Solche Phänomene sind zwar in der Geometrie kaum anzutreffen, werden aber im späteren Studium, etwa bei der unendlich dimensionalen Analysis, wieder auftauchen und es ist wichtig, sie im Hinterkopf zu behalten.

Nach diesem anfänglichen Flirt mit der furchteinflößenden Allgemeinheit werden wir uns für den Rest des Kurses auf solche topologischen Räume konzentrieren, die von geometrischer Natur sind, und uns dabei auf immer verschiedene Art und Weise die gleiche Frage stellen und beantworten: „Wie viele Löcher hat dieser Raum?“ Die erste Interpretation dieser Fragestellung ist durch die *Fundamentalgruppe* gegeben. Das ist ein algebraisches Objekt, das jedem topologischen Raum zugeordnet werden kann. Die Fundamentalgruppe misst, ob oder ob nicht geschlossene Wege in diesem Raum zusammenziehbar sind, oder anders gesagt, durch eine Kreisscheibe zu füllen sind. Ein verwandter wichtiger Begriff in diesem Zusammenhang ist die *Homotopie*, d.h. eine kontinuierliche Deformation einer stetigen Abbildung. Wir werden beweisen, dass die Fundamentalgruppe nicht nur invariant unter Homöomorphismen bleibt, sondern auch unter einer weitaus flexibleren Klasse von Abbildungen, der sogenannten Homotopieäquivalenzen. Im Anschluss stellen wir zwei wichtige Hilfsmittel zur Berrechnung der Fundamentalgruppe vor: den Satz von Seifert-van-Kampen und die Überlagerungsräume. Durch beide werden wir einen Einblick in das sehr tiefgreifende Zusammenspiel von Topologie und Gruppentheorie erhalten.

In den darauf folgenden Wochen beschäftigen wir uns mit dem etwas spezialisierteren Thema der Differenzialtopologie. Dabei sind allgemeine topologische Räume durch glatte endlichdimensionale Mannigfaltigkeiten und stetige Abbildungen durch glatte, d.h. unendlich oft differenzierbare, Abbildungen ersetzt. Unter diesen Vorraussetzungen garantiert der Satz von Sard, dass die meisten (in einem mathematisch sehr präzisen Sinne) Werte jeder glatte Abbildung regulär sind, und wir können den *Abbildungsgrad* $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ für jede stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen geschlossenen zusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension definieren. Intuitiv gesprochen ist der Abbildungsgrad die homotopieinvariante Antwort auf die Frage „Wie viele Punkte gibt es in $f^{-1}(p)$, wenn $p \in N$ ein beliebiger Punkt in allgemeiner Lage ist?"

Der letzte Teil des Kurses bildet eine Einführung in das große Thema der Homologie und Kohomologie. Dabei geht es, vereinfacht gesagt, um eine weitere Art Löcher (verschiedener Dimension) in topologischen Räumen zu zählen. Nach einer kurzen Motivation des Themas anhand von Simplizialkomplexen werden wir singuläre Homologie- und Kohomologiegruppen definieren. Wir werden sehen, dass es zu jeder stetigen Abbildung zwischen topologischen Räumen einen Homomorphismus zwischen den zugeordneten (Ko)Homologiegruppen gibt. Zusammen mit den notwendigen Vorraussetzungen aus dem Gebiet der homologischen Algebra, und zwar Kettenkomplexe, exakte Sequenzen und „Diagrammjagden", erarbeiten wir uns einen Beweis für die Homotopieinvarianz von singulärer Homologie und berrechnen sie für einfache Beispiele, etwa für Sphären. Dies liefert uns dann die Grundlage für einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Wenn es die Zeit noch zulässt, werden wir uns in den letzten Wochen den Zell- bzw. CW-Komplexen zuwenden. Diese liefern auch eine Homologietheorie, nämlich die zelluläre Homologie, welche für Berrechnungen ein weitaus leistungsstärkeres Hilfsmittel darstellt.

Literatur

Der Kurs folgt keinem einzelnen Buch, aber es gibt eine Reihe guter Referenzen. Insbesondere:

- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002
  (auch kostenlos von der Seite des Autors herunterzuladen unter:
  `https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`)

Diese Quelle behandelt den Großteil der Themen, die wir in diesem Kurs und auch im anschliessenden Kurs (Topologie II) besprechen werden, wenn auch mitunter mit leicht abweichendener Betrachtung. Der Teil, welcher davon aber nicht oder nur sehr wenig abgedeckt wird, ist der Abschnitt über Differenzialtopologie. Dafür ist eine andere exzellente Quelle zu empfehlen:

- John Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press 1997

Wir möchten Ihnen auch sehr die folgenden Bücher ans Herz legen, auch für den Stoff, den wir nächstes Semester in Topologie II behandeln werden:

- Glen Bredon, *Topology and Geometry*, Springer GTM 1993
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- James W. Vick, *Homology Theory*, Springer GTM 1994
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie - Eine Einführung*, Teubner 1994
  (verfügbar in der Universitätsbibliothek der HU, Freihandbestand)
- Jänich, *Topologie*, Springer 2005
  (weniger relevant zur Vorlesung aber amüsant geschrieben — Online-Zugriff durch die Universitätsbiblithek der HU)

Eine klassische Referenz für die detailiertere Beschreibung der wichtigen technischen Resultate in der Differenzialtopologie (welche wir zwar nennen aber nicht beweisen werden) ist:

- Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer GTM 1976
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)

Das folgende Buch ist eine Standardreferenz für die gründliche Behandlung von *Allgemeiner Topologie*, also der Teil des Gebiets, welcher sich mit der uneingeschränkten Klasse von topologischen Räumen beschaftigt und weniger mit den algebraischen Invarianten oder Anwendungen für die Geometrie. (Hier verwende ich das Wort „Referenz“ im Sinne: „Ich würde niemanden dies als ein Lehrbuch empfehlen, aber ich fühle mich sicherer, es im Bücherschrank zu haben.“)

- John L. Kelley, *General Topology*, Springer GTM 1975

Klausur und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine dreistündige **schriftliche Klausur** kurz nach Semesterende (mit Nachholtermin kurz vor Beginn des nächsten Semesters) bestimmt. Bücher und Notizen dürfen in der Klausur benutzt werden.

Übungsblätter werden wöchentlich Mittwochs ausgehändigt mit Abgabetermin vor der Übung am folgenden Mittwoch (Lösungen werden in der Übung besprochen).

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte “**take-home midterm**”. Diese hat die Form eines Übungsblatts, das unter besonderen Bedingungen bearbeitet wird: Lösungen müssen innerhalb von zwei Wochen ohne Zusammenarbeit erarbeitet und eingereicht werden.

Je nach erreichter Gesamtpunktzahl bei den Hausaufgaben und beim Midterm kann die Klausurnote verbessert werden:

- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **oder** Midterm $\geq 75\%$ = (2,0 $\rightarrow$ 1,7 oder 1,7 $\rightarrow$ 1,3 usw.)
- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **und** Midterm $\geq 75\%$ = (2,3 $\rightarrow$ 1,7 oder 2,0 $\rightarrow$ 1,3 usw.)

Programm

Der Kurs ist in vier Teile untergliedert:

I. **Allgemeine Topologie** (Wochen 1–2)

II. **Die Fundamentalgruppe** (Wochen 3–8)

III. **Differenzialtopologie** (Wochen 8–10)

IV. **Homologie** (Wochen 10–14)

Der folgende Wochenplan ist vorläufig und Änderungen vorbehalten.

1. Allgemeine Einleitung und Motivation, metrische Räume, Stetigkeit, Homöomorphismen.

2. Topologische Räume, Standardkonstruktionen (Produkte, Disjunkte Vereinigungen, Quotienten, Verklebungen), Kompaktheit, zusammenhängende Räume, Trennungsaxiome.

3. Pfade, pfadzusammenhängende Räume, die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$.

4. Homotopie, Retraktionen, weitere Eigenschaften von $\pi_1(X)$.

5. Gruppen mit endlichen Erzeugern und Relationen, der Satz von Seifert-van-Kampen.

6. Einleitung in Überlagerungsräume, Hochhebungssatz (lifting theorem).

7. Die universelle Überlagerung, Decktransformationen, reguläre/normale Überlagerungen im Zusammenhang mit $\pi_1(X)$
8. Einführung in höhere Homotopiegruppen $\pi_k(X)$, topologische Gruppen, topologische und glatte Mannigfaltigkeiten.
9. Kritische Punkte und der Satz von Sard, Satz von der impliziten Funktion, Abbildungsgrad modulo 2.
10. Orientierungen und der ganzzahlige Abbildungsgrad, Simplizialkomplexe und eine Andeutung von simplizialer Homologie.
11. Singuläre Homologie $H_*(X)$ und Kohomologie $H^*(X)$, Kettenabbildungen, exakte Sequenzen, die lange exakte Sequenz eines Paars.
12. Homotopieinvarianz der Homologie, die Mayer-Vietoris Sequenz, Berrechnungen von $H_0(X)$ und $H_1(X)$.
13. Berrechnung von $H_*(S^n)$, den Brouwerschen Fixpunktsatz, Einleitung in CW-Komplexe und zellulärer Homologie.
14. (Noch zu entscheidende weitere Themen, falls es die Zeit zulässt)

Vorschau: Inhalte von Topologie II (Winter 2017–2018)

Definitiv:
Axiomatische Homologie und Kohomologie (die Eilenberg-Steenrod Axiome), Äquivalenz von zellulärer und singulärer Homologie, Cup-Produkt für die Kohomologie, die Künnethformel, Universelles Koeffiziententheorem, Fundamentalklassen und Poincaré Dualität, Schnitttheorie, höhere Homotopiegruppen, Serre-Faserungen und die exakte Homotpiesequenz, der Hurewiczhomomorphismus $\pi_k(X) \to H_k(X)$, Satz von Whitehead über schwache Homotopeiäquivalenzen.

Optional:
Fixpunktsatz von Lefschetz, Differenzialformen und der Satz von de Rahm, Bündel und klassifizierende Räume, Obstruktionstheorie, Kobordismengruppen, charakteristische Klassen, exotische Sphären.