**Inhaltsbeschreibung**

## Allgemeine Informationen

**Lehrperson:** Prof. Chris Wendl
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
`wendl@math.hu-berlin.de`
Sprechstunde: Dienstags 15:00–16:00

**Website:** `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2016/hPrinzip/`

**Termine:** Mittwochs 13:00–15:00 in 3.007 (Rudower Chaussee 25)

**Sprache:** Nach Wunsch der Hörer kann das Seminar auf Deutsch oder auf Englisch (abhängig von Vortragendem und Publikum) gehalten werden. Wer das Seminar besuchen will und eine eindeutige Präferenz hat, kann mich gern im Voraus kontaktieren.

**Voraussetzungen:** Inhalte der Vorlesungen *Differentialgeometrie I* und *Topologie I*; Teilnehmern ohne Vorkenntnisse in der algebraischen Topologie wird empfohlen, die Vorlesung *Topologie II* parallel zum Seminar zu besuchen.
Vorausgesetzt wird, dass alle Teilnehmer mit glatten $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Tensoren, Differentialformen und Riemannschen Metriken, sowie einigen grundlegenden Begriffen der Topologie wie Homotopie-Äquivalenz und der Fundamentalgruppe vertraut sind. Erfahrung mit einigen fortgeschrittenen Themen wie Faserbündeln, CW-Komplexen, höheren Homotopiegruppen, Kohomologie und charakteristischen Klassen wäre zusätzlich hilfreich, wird aber nicht vorausgesetzt—wir werden in den ersten Wochen etwas Zeit auf diese Themen verwenden, um sicherzustellen, dass alle Teilnehmer damit sicher umgehen können.

## Überblick

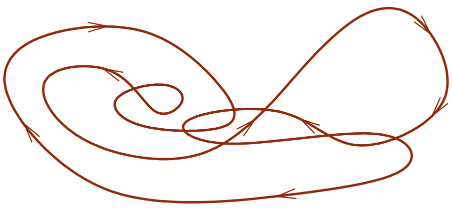
Viele natürliche Fragestellungen in der Differentialgeometrie und Differentialtopologie—zum Beispiel die Existenz von Immersionen, symplektischen Formen, oder isometrischen Abbildungen—lassen sich mittels partieller Differentialrelationen (PDRs) formulieren, d.h. Gleichungen oder Ungleichungen, die die partiellen Ableitungen einer Abbildung einschränken. Bei der Bewältigung einer solchen Systems gibt es oft ein einfacheres Problem, das zuerst gelöst werden muss: die Klassifikation von *formellen Lösungen*, d.h. Abbildungen, die eine entsprechende algebraische Relation ohne Ableitungen erfüllen. Um die Idee zu erläutern, betrachten wir die folgende einfache Fragestellung:

***Frage**: Gibt es hinreichende und notwendige Eigenschaften, die zwei Immersionen $\gamma : S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ "regulär" homotop zueinander werden lassen, d.h. homotop durch eine 1-parametrige Familie von Immersionen?*

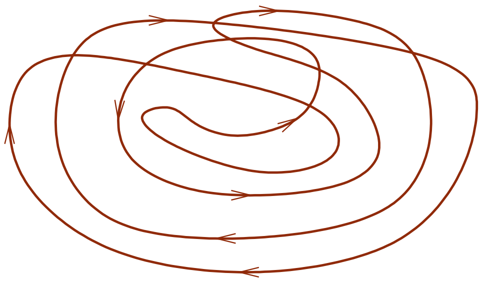
Die PDR in diesem Beispiel ist die Bedingung, dass alle zu betrachtenden Schleifen $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ Immersionen seien, sprich $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in S^1$. Falls zwei solche Schleifen $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$ regulär homotop sind, dann müssen freilich ebenso die entsprechenden Schleifen von Tangentialvektoren $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in der punktierten Ebene homotop sein. Da $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, trifft dies genau dann zu, wenn diese Schleifen diegleiche Windungszahl haben,

$$\mathrm{wind}(\dot{\gamma}_1) = \mathrm{wind}(\dot{\gamma}_2) \in \mathbb{Z}.$$

Natürlich ist diese Aussage noch nicht konstruktiv, und es sind die meisten Schleifen in einer beliebigen Homotopie von $\dot{\gamma}_1$ nach $\dot{\gamma}_2$ nicht eigentlich Schleifen von Tangentialvektoren zu Immersionen $S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2$, so dass uns eine formelle Lösung hier noch nicht unbedingt weiterhilft. In dieser speziellen Situation ist es jedoch überraschenderweise so, dass formelle Lösungen zum Problem echte Lösungen implizieren: Das sogenannte *Whitney-Graustein Theorem* besagt, dass zwei immersierte Schleifen in $\mathbb{R}^2$ genau dann regulär homotop sind, wenn die Windungszahlen ihrer ersten Ableitungen gleich sind. Die Gleichheit der Windungszahlen ist generell ziemlich leicht zu prüfen, auch wenn es in der Praxis oft unmöglich scheint, zwischen zwei gegebenen immersierten Schleifen eine explizite reguläre Homotopie zu finden!



$\overset{?}{\sim}$



Im allgemeinen sagen wir, ein auf einer PDR basierendes differentialgeometrisches Problem **erfüllt das h-Prinzip**, falls es sich auf das Problem der formellen Lösungen reduzieren lässt. Letzteres ist typischerweise ein Problem der algebraischen Topologie, zu dessen Lösung keine tieferen analytischen oder geometrischen Methoden benötigt werden—das unterliegende topologische Problem kann leicht oder schwierig sein, ist aber meistens erheblich einfacher als das Lösen einer PDE oder PDR. Dass manche geometrische Probleme in diesem Sinn "flexibel" sind, wurde zuerst von Gromov um 1970 erkannt; dabei waren verschiedene Beispiele davon schon seit den 1950ern oder früher bekannt gewesen, ohne als allgemeines Phänomen erkannt zu werden. Das h-Prinzip existiert in verschiedenen Versionen, und es hat Anwendungen in einem breiten Feld von Gebieten der Mathematik. Hier einige berühmte Beispiele:

- Die Immersionstheorie von Smale-Hirsch in der Differentialtopologie: dies ist eine Verallgemeinerung des Whitney-Graustein Theorems und umfasst auch die verblüffende Tatsache, dass die 2-Sphäre sich mit einer glatten Familie von Immersionen $S^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ "invertieren" lässt! Letzteres ist bekannt als die *Smale eversion.* (Für ein unterhaltsames und informatives Video darüber, siehe `http://www.youtube.com/watch?v=wO61D9x6lNY`.)
- Das "$C^1$-isometric embedding" Theorem von Nash-Kuiper impliziert unter anderem, dass jede Riemannsche $n$-Mannigfaltigkeit eine isometrische Einbettung von Klasse $C^1$ in beliebig kleine Kugeln in $\mathbb{R}^{n+1}$ zulässt. Man kann mit Krümmung beweisen, dass dies für Einbettungen der Klasse $C^2$ nicht geht.
- Existenz und Eindeutigkeit (bis auf Homotopie) von symplektischen und Kontaktstrukturen auf offenen Mannigfaltigkeiten.

Dazu gibt es Resultate in der Theorie von Blätterungen (foliations) und der Existenz von Metriken mit negativer Krümmung, sowie mehrere bahnbrechende Entdeckungen in der symplektischen und Kontakttopologie, wo es um die Flexibilität von bestimmten Klassen von Kontaktstrukturen oder Legendre-Untermannigfaltigkeiten oder Stein-Mannigfaltigkeiten geht. Eine häufig vorkommende Eigenschaft bei h-Prinzipien ist, dass sie sich nur sehr schwer visualisieren lassen, und aus diesem Grund scheint es meistens überraschend, wenn ein h-Prinzip gilt. Wenn andererseits das h-Prinzip versagt, dann weist dies oft auf die Existenz interessanter geometrischer Invarianten hin, die mehr als rein topologische Informationen beinhalten.

Ziel dieses Seminars ist das Eindringen in die Grundlagen des Themenbereichs, inklusiv zumindest der drei oben genannten klassischen Anwendungen, und die Anleitung zur Benutzung zweier sehr wirkungsvoller Hilfsmittel zum Beweisen von allgemeinen h-Prinzipien: holonomische Approximation und konvexe Integrationstheorie. Ein besonderer Schwerpunkt wird die Anwendung dieser Wekzeuge in der symplektischen

Geometrie sein, wo das h-Prinzip in den letzten Jahrzehnten einen besonderen Einfluss auf die Entwicklung des Gebiets ausgeübt hat.

## Literatur

Der wesentliche Teil des Seminars basiert auf:

- Yakov Eliashberg und Nikolay Mishachev, *Introduction to the h-principle*, AMS 2002
  Ein sehr gutes Buch zum Lernen der wesentlichen Ideen, mit besonders guter Abdeckung der Anwendungen in der symplektischen Geometrie. Neben einer ausführlichen Diskussion von konvexer Integration entwickelt es auch die Methode der holonomischen Approximation, die einige Beweise vereinfacht, die früher nur durch die "covering homotopy" Methode zugänglich waren.
  (Kostenloser Online-Zugriff vom HU-Netzwerk möglich unter `http://www.ams.org/books/gsm/048/`)

Folgende zusätzliche Lektüren werden ebenfalls empfohlen:

- Hansjörg Geiges, *h-principles and flexibility in geometry*, Memoirs of the AMS, 2003
  Ein sehr kleines Buch mit einer lesbaren Einführung in die grundsätzlichen Ideen, mit Schwerpunkt auf der "covering homotopy" Methode und Anwendungen davon, dazu eine Skizze der konvexen Integrationstheorie.
- Mikhael Gromov, *Partial differential relations*, Springer 1986
  Dies ist die "Bibel" des Gebiets und beinhaltet eine große Menge interessantes Materials, ist für Anfänger allerdings eher schwierig zu lesen.
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Vincent Borelli, lecture notes on convex integration (von einem Workshop 2012 in Les Diablerets), verfügbar unter `http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Diablerets/`

Für Themen in der algebraischen Topologie, die einigen Teilnehmern vielleicht noch unbekannt sind, schlage ich die folgenden Bücher vor:

- Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer GTM 1993
  (Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press 2002
  (elektronische Version kostenlos downloadbar auf der Website des Autors unter
  `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`)

Wir werden die *Obstruktionstheorie* in diesem Seminar nicht sehr ausführlich behandeln, sie wirkt im Hintergrund jedoch öfters an relevanten Stellen. Wer deswegen mehr darüber lesen möchte, dem sei hier noch der Klassiker zum Thema empfohlen:

- Norman Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press 1957

Wer glatte Faserbündel und Strukturgruppen aus der Differenzialgeometrie noch nicht gesehen hat kann darüber unter anderem im zweiten Kapitel von:

- Chris Wendl, *Lecture Notes on Bundles and Connections*
  (verfügbar unter `http://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/connections.html`)

nachlesen.

## Provisorischer Vortragsplan

Vortragsthemen und Termine werden in der ersten Sitzung am 19. Oktober vergeben. In den ersten Wochen werden wir einige Standardthemen in der algebraischen Topologie und Differentialgeometrie behandeln, die für einige Teilnehmer möglicherweise neu sind. Danach arbeiten wir das Buch von Eliashberg und Mishachev durch.

1. Allgemeine Einleitung und Vergabe von Vortragsthemen
2. Höhere Homotopiegruppen, schwache Homotopie-Äquivalenz, die lange exakte Sequenz für Faserungen (Hatcher, Teile von Kapitel 4)
3. CW-Komplexe und einfache Beispiele von Obstruktionstheorie (Auszüge von Steenrod)
4. Jet-Bündel und PDRs, allgemeine Formulierungen des h-Prinzips (Eliashberg-Mishachev, Teile von Kapiteln 1, 5 und 6)
5. Der Satz über holonomische Approximation, Teil 1 (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 3)
6. Der Satz über holonomische Approximation, Teil 2 (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 3)
7. Das h-Prinzip für offene Diff-invariante Relationen (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 7)
8. Der Satz von Smale-Hirsch über Immersionen und weitere Anwendungen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 8)
9. Symplektische und Kontaktstrukturen auf offenen Mannigfaltigkeiten (Eliashberg-Mishachev, Teile von Kapiteln 9 und 10)
10. Microflexibilität und isotropische Immersionen (Eliashberg-Mishachev, Teile von Kapiteln 13 und 14)
11. Lagrange- und Legendre-Immersionen (Eliashberg-Mishachev, Teile von Kapiteln 15 and 16)
12. Konvexe Integration in Dimension 1 (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 17)
13. Das h-Prinzip für "ample" differentielle Relationen (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 18)
14. Gezielte Immersionen und Einbettungen (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 19)
15. Der Satz von Nash-Kuiper über isometrische Immersionen (Eliashberg-Mishachev, Kapitel 21)
16. (TBA)