HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 10

Schriftliche Abgabe: Dienstag 7. Januar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 10.1 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert fast überall[1] durch $f(x,y) := \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$.
Bestimmen Sie für die gegebenen Teilmengen $E \subset \mathbb{R}^2$, ob f auf E Lebesgue-integrierbar ist,[2] und wenn ja, berechnen Sie $\int_E f(x,y)\,dx\,dy$.

a) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ und } 0 \le y \le x\}$
b) $E := [1,\infty) \times [1,2]$
c) $E := [1,\infty) \times [1,\infty)$
d) $E := [0,1] \times [0,1]$

Vorsicht: Bevor Sie den Satz von Fubini anwenden, müssen Sie in jedem Fall prüfen, ob die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)
Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Produktmaßes, d.h. sind $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ zwei σ-endliche Maßräume und $\Pi,\Pi' : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ zwei Maße auf $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$, die

$$\Pi(A\times B) = \Pi'(A\times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{A} \text{ und } B \in \mathcal{B}$$

erfüllen, dann gilt $\Pi = \Pi'$.
Hinweis: Betrachten Sie das Mengensystem $\Omega := \big\{E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \;\big|\; \Pi(E) = \Pi'(E)\big\}$.

Aufgabe 10.3 (2 + 4 Punkte)
Sei $X := Y := [0,1]$ und $\mathcal{A} := \mathcal{B} := 2^{[0,1]}$. Man betrachte das Zählmaß $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ (s. Aufgabe 6.3(a)) und ein Maß $\nu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\nu(E) := \begin{cases} 0 & \text{falls } E \subset [0,1] \text{ endlich oder abzählbar unendlich ist,} \\ \infty & \text{falls } E \subset [0,1] \text{ überabzählbar ist.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass beide Maßräume $(X,\mathcal{A},\mu)$ und $(Y,\mathcal{B},\nu)$ nicht σ-endlich sind.
b) Sei $\Delta := \{(t,t) \in [0,1]^2 \mid t \in [0,1]\} \subset X \times Y$. Definieren Sie zwei Maße Π,Π' auf $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$, die (wie in Aufgabe 10.2) auf allen Produktmengen $A \times B \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ gleich sind aber $\Pi(\Delta) \ne \Pi'(\Delta)$ erfüllen.
Hinweis: Π *und* Π' *können durch zwei Integrale definiert werden, die gleich wären, wenn* μ *und* ν *beide* σ*-endlich wären.*

---

[1] Da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist, ist es unwichtig, wie f auf dieser Teilmenge definiert wird.

[2] Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $E \subset X$ in einem Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ heißt **μ-integrierbar auf** E, falls die erweiterte Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F|_E \equiv f$ und $F|_{X\setminus E} \equiv 0$ μ-integrierbar ist.

Insgesamt: **20 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 10.Z (5 Punkte)
Die Funktion $\dfrac{\sin x}{x}$ ist auf $[0,\infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar, hat aber trotzdem ein wohl definiertes *uneigentliches* Integral, d.h. die Funktion ist auf $[0,N]$ für jedes $N>0$ Lebesgue-integrierbar,[3] und der Grenzwert

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx := \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existiert. Zeigen Sie, dass dieser Grenzwert $\dfrac{\pi}{2}$ ist.
Hinweis: Wegen Aufgabe 7.3(c) gilt $\int_0^N \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^N \frac{\sin x}{x}\,dx$*. Ersetzen Sie* $1/x$ *in diesem Integrand mit* $\int_0^\infty e^{-xt}\,dt$ *für* $x>0$*.*

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 10.A
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die Funktion definiert fast überall durch $f(x,y):=\dfrac{\operatorname{sgn}(xy)}{x^2+y^2}$, wobei $\operatorname{sgn}(t):=1$ für $t>0$ und $\operatorname{sgn}(t):=-1$ für $t<0$. Zeigen Sie, dass alle Lebesgue-Integrale in der Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

wohl definiert sind (d.h. die relevanten Funktionen sind Lebesgue-integrierbar), und dass die Gleichung erfüllt wird, aber f trotzdem nicht Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 10.B
Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $(Y,\mathcal{B})$ ein messbarer Raum und $\delta_p:\mathcal{B}\to[0,\infty]$ das Dirac-Maß in einem Punkt $p\in Y$ (s. Aufgabe 6.3(b)).

a) Erklären Sie die genaue Bedeutung vom Produktmaß $(\mu\otimes\delta_p)(E)$ für $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, und vom Integral $\displaystyle\int_E f\,d(\mu\otimes\delta_p)$ einer $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$-messbaren Funktion $f:X\times Y\to\mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi: L^1(\mu\otimes\delta_p)\to L^1(\mu),\qquad \Phi(f):=f(\cdot,p)$$

wohl definiert und eine Isometrie zwischen den Banachräumen $L^1(\mu\otimes\delta_p)$ und $L^1(\mu)$ ist, d.h. $\|\Phi(f)\|_{L^1}=\|f\|_{L^1}$.

[3] Der Punkt $x=0$ ist unproblematisch, weil $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ existiert, also lässt sich $\frac{\sin x}{x}$ als stetige Funktion auf $[0,N]$ fortsetzen.