Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 12

Schriftliche Abgabe: Dienstag 21. Januar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 12.1 (2 + 2 + 3 + 3 + 2 Punkte)
Sei $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel und $\alpha \in (0, \infty)$ eine Konstante. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben fast überall durch $f(\mathbf{x}) := \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha}$.

a) Für welche $\alpha \in (0, \infty)$ und $p \in [1, \infty]$ gehört $f|_{\mathbb{D}^n}$ zu $L^p(\mathbb{D}^n)$?
b) Für welche $\alpha \in (0, \infty)$ und $p \in [1, \infty]$ gehört $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n}$ zu $L^p(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n)$?

Hinweis: siehe Aufgabe 11.A(b).
Der Vektorraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, genannt **Schwartzscher Raum** oder der **Raum von schnell fallenden Funktionen**, besteht aus allen glatten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|^k \partial^\alpha f(\mathbf{x})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden Multi-index[1] α beschränkt ist. Zeigen Sie:

c) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$.
d) Für jedes $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und jeden Multi-index α gehören $\partial^\alpha f$ und $\mathbf{x}^\alpha f$ auch zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
e) Die Gaußsche Funktion $f(\mathbf{x}) := e^{-c\|\mathbf{x}\|^2}$ gehört für jedes $c > 0$ zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung: Der Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ glatter Funktionen mit kompakten Trägern ist auch enthalten in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leqslant p < \infty$, also folgt, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ auch dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt.

Aufgabe 12.2 (3 + 2 + 2 Punkte)
Der Vektorraum $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ besteht aus allen Äquivalenzklassen (bis auf Gleichheit fast überall) messbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die

$$\|f\|_{L^p(K)} := \left(\int_K |f|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty$$

für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen. Im Folgenden sind zwei Konstanten $p, r \in [1, \infty]$ mit $r > p$ gegeben.

a) Beweisen Sie: für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|f\|_{L^p(K)} \leqslant c\|f\|_{L^r(K)}$ für alle messbaren Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$. Insbesondere folgt: $L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist in $L^q(K)$ für jedes $q \in [1, \infty]$.
b) Finden Sie ein explizites Beispiel einer Funktion in $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \setminus L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
c) Finden Sie ein explizites Beispiel einer Funktion in $L^r(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$.

[1] Zur Erinnerung: ein **Multi-index** auf $\mathbb{R}^n$ ist ein n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Er bestimmt einen Differentialoperator von Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ durch $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, sowie eine polynomielle Funktion $\mathbf{x}^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von Grad $|\alpha|$ durch $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Aufgabe 12.3 (2 + 4 Punkte)
In dieser Aufgabe können alle Funktionen auch komplexwertig sein. Für die gewöhnlichen Sätze über Integrale (Fubini, Transformationsformel, Youngsche Ungleichung) dürfen Sie davon ausgehen, dass dies keinen Unterschied macht (s. Aufgabe 7.A).

a) Beweisen Sie: $\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} F(\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{y})\,d^nx\,d^ny = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} F(\mathbf{u},\mathbf{v})\,d^nu\,d^nv$ für alle $F \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

b) Die **Fourier-Transformierte** einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist per Definition die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})e^{-2\pi i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\,d^nx.$$

Laut der Youngschen Ungleichung ist die Faltung $f * g$ von zwei Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ auch in $L^1(\mathbb{R}^n)$, hat also eine wohl definierte Fourier-Transformierte $\widehat{f * g}$. Beweisen Sie: für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

Aufgabe 12.4 (5 Punkte)
Wir betrachten $\Omega := (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß, und bezeichnen mit $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum aller glatten Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit kompakten Trägern. Weil $C_0^\infty(\Omega)$ für alle $p \in [1,\infty)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegt, wissen wir, dass jede $f \in L^p(\Omega)$ die Grenzfunktion einer L^p-konvergenten Folge $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$ ist. Zeigen Sie: falls $p > 1$ und eine Konstante $c > 0$ mit $\|f_j'\|_{L^p} \leqslant c$ für alle j existiert, dann gilt $f = g$ f. ü. für eine *stetige* Funktion g.
Hinweis: Versuchen Sie, durch die Hölder-Ungleichung zu zeigen, dass f_j die Voraussetzungen für den Satz von Arzelà-Ascoli erfüllt.

Insgesamt: **30 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 12.A
Geben Sie einen direkten Beweis (ohne Reihen oder absolute Konvergenz), dass alle Cauchy-Folgen in $L^\infty(\mu)$ bzgl. der L^∞-Norm konvergieren, und dass sie auch punktweise fast überall konvergieren.

Aufgabe 12.B
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion der Teilmenge $[0,\infty)$. Zeigen Sie: $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, aber für jede stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\|f - \varphi\|_{L^\infty} \geqslant 1/2$. Dies beweist, dass $C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 12.C
Wir betrachten zwei nicht fast überall verschwindende messbare Funktionen $f, g : X \to [0,\infty)$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, und $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\int_X fg\,d\mu = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$ genau dann, wenn f^p/g^q fast überall konstant ist.
Hinweis: Zum Beweis der Hölderschen Ungleichung in der Vorlesung haben wir die Youngsche Ungleichung $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{q}$ für $a, b \geqslant 0$ verwendet, und dabei bemerkt, dass Gleichheit nur im Fall $a^p = b^q$ gilt.

b) Es gilt $\|f + g\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ genau dann, wenn f/g fast überall konstant ist.

Aufgabe 12.D
Zeigen Sie, dass die Aussage in Aufgabe 12.4 im Fall $p = 1$ falsch ist.