Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 13

Schriftliche Abgabe: Dienstag 28. Januar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 13.1 (2 + 3 + 5 + 4 + 4 + 3 Punkte)
Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Eine Folge $f_n \in L^p(\mu)$ heißt **schwach konvergent** gegen $f \in L^p(\mu)$, falls für jedes $g \in L^q(\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \, d\mu = \int_X f g \, d\mu.$$

Wenn $f_n \in L^p(\mu)$ schwach gegen $f \in L^p(\mu)$ konvergiert, schreiben wir $f_n \xrightharpoonup{L^p} f$. Wir schreiben $f_n \xrightarrow{L^p} f$ für den gewöhnlichen Begriff von Konvergenz in $L^p(\mu)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^p} = 0$. Die Folge f_n heißt **L^p-beschränkt**, falls eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass $\|f_n\|_{L^p} \leqslant c$ für alle n. Beweisen Sie:

a) Falls $f_n \xrightarrow{L^p} f$, dann folgt auch $f_n \xrightharpoonup{L^p} f$.

b) Falls $f_n \xrightharpoonup{L^p} f$ und $f_n \xrightharpoonup{L^p} h$, dann sind f und h dasselbe Element von $L^p(\mu)$, d.h. sie sind fast überall gleich.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^p(\mu)$, $g := f|f|^{p-2}$ in $L^q(\mu)$ ist.

c) Für jedes $f \in L^p(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ ist die Folge $f_n \in L^p(\mathbb{R})$, gegeben durch $f_n(x) := f(x+n)$, L^p-beschränkt und schwach konvergent gegen $0 \in L^p(\mathbb{R})$, aber hat trotzdem keine L^p-konvergente Teilfolge.

d) Sei $E \subset L^q(\mu)$ eine abzählbare Teilmenge und $f_n \in L^p(\mu)$ eine L^p-beschränkte Folge. Dann hat f_n eine Teilfolge f_{k_n}, so dass die Folge $c_n := \int_X f_{k_n} \cdot g \, d\mu \in \mathbb{R}$ für jedes $g \in E$ konvergiert.
Hinweis: Erinnern Sie sich an das Cantorsche Diagonalargument?

e) Sei $F \subset L^q(\mu)$ eine dichte Teilmenge und $f_n \in L^p(\mu)$ eine L^p-beschränkte Folge, so dass die Folge $c_n := \int_X f_n g \, d\mu \in \mathbb{R}$ für jedes $g \in F$ konvergiert. Dann konvergiert c_n auch für jedes $g \in L^q(\mu)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass c_n für jedes $g \in L^q(\mu)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

f) Sei $f_n \in L^2(\mu)$ eine L^2-beschränkte Folge, so dass die Folge $c_n := \int_X f_n g \, d\mu \in \mathbb{R}$ für jedes $g \in L^2(\mu)$ konvergiert. Dann folgt $f_n \xrightharpoonup{L^2} f$ für eine Funktion $f \in L^2(\mu)$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\ell(g) := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n g$ ein stetiges lineares Funktional $\ell : L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ definiert, und wenden Sie den Rieszschen Darstellungssatz an. (Das Resultat stimmt eigentlich auch für $f_n \in L^p(\mu)$ mit jedem $p \in (1, \infty)$, aber in der Vorlesung wurde der Rieszsche Darstellungssatz nur im Fall $p = 2$ bewiesen.)

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leqslant p < \infty$ separabel ist,[1] also kann die gleiche Menge für $E, F \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ in Teilaufgaben (d) und (e) gewählt werden. Aus dieser Aufgabe folgt also ein wichtiges Resultat, das unter dem Namen Satz von Banach-Alaoglu bekannt ist: für $1 < p < \infty$ hat jede L^p-beschränkte Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ eine schwach konvergente Teilfolge.

[1] Siehe Theorem 4.13 im Buch von Salamon.

Aufgabe 13.2 (2 + 4)
Auf der offenen Teilmenge $\mathcal{U} := \mathbb{R}^3 \backslash \{x = y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten (x, y, z) schreiben wir $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$ und definieren damit ein glattes Vektorfeld $\mathbf{V} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{V}(x, y, z) := \left(-\frac{y}{\rho^2}, \frac{x}{\rho^2}, 0 \right).$$

a) Berechnen Sie das Vektorfeld $\operatorname{rot}(\mathbf{V}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$.

b) Sei $\mathcal{V} := \mathbb{R}^3 \backslash \{x \geqslant 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathcal{U}$. Finden Sie eine C^1-Funktion $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, die $\operatorname{grad} f = \mathbf{V}$ auf $\mathcal{V}$ erfüllt, aber zeigen Sie dabei, dass keine C^1-Funktion mit dieser Eigenschaft auf ganz $\mathcal{U}$ existiert.
Hinweis: Versuchen Sie, f als Funktion der zylindrischen Polarkoordinaten (ρ, θ, z) mit $x = \rho \cos\theta$ und $y = \rho \sin\theta$ hinzuschreiben. Was müssen $\partial_\rho f$ und $\partial_\theta f$ sein, wenn $\nabla f = \mathbf{V}$?

Insgesamt: **27 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 13.A

a) Sei H ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und entsprechender Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $V \subset H$ ein linearer Unterraum, $w \in H \backslash V$ und $E := V + w = \{v + w \in H \mid v \in V\} \subset H$. Beweisen Sie: ist $x \in E$ ein Element mit $\|x\| \leqslant \|y\|$ für alle $y \in E$, dann ist x orthogonal zu V, d.h. $\langle x, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$.
Bemerkung: In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass ein Element $x \in E$ mit dieser Eigenschaft existiert, falls $(H, \|\ \|)$ vollständig und $V \subset H$ abgeschlossen ist.

b) Wir betrachten den Unterraum $V := C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ im Hilbertraum $H := L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} fg\, dm$. Zeigen Sie: $H \backslash V \neq \varnothing$, aber es gibt *kein* nichttriviales Element $f \in H$, das orthogonal zu V ist.

c) Versuchen Sie, durch das Argument aus der Vorlesung zu zeigen, dass $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein nichttriviales Element $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ enthält, das orthogonal zum Unterraum $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Das ist natürlich unmöglich, denn es widerspricht das Resultat von Teilaufgabe (b). Was genau geht schief im Beweis?

Aufgabe 13.B
Nehmen wir an, der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ deutet in die x-Richtung und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ liegt in der xy-Ebene. Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ dann orthogonal zum von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Unterraum ist, und

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \sin\theta,$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist.
Bemerkung: Wir werden später sehen, dass das Kreuzprodukt invariant bzgl. Rotationen in $\mathbb{R}^3$ ist. Davon folgt, dass diese Relation zwischen den drei Vektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ eigentlich immer gilt, nicht nur wenn $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \{(0,0)\}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Aufgabe 13.C
Beweisen Sie die Formeln $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ und $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$ für eine C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bzw. ein C^2-Vektorfeld $\mathbf{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Warum müssen wir hier annehmen, dass f bzw. $\mathbf{X}$ von der Klasse C^2 ist, d.h. warum reicht es nicht, wenn $\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{rot} \mathbf{X}$ nur differenzierbar (aber nicht stetig differenzierbar) sind?