Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 14

Schriftliche Abgabe: Dienstag 4. Februar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 14.1 (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)
Bestimmen Sie für jeden der folgenden Diffeomorphismen, unter welchen Bedingungen er orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend ist.

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) := (x_2, \dots, x_n, x_1)$

b) $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{y}, \mathbf{x})$

c) $g \circ f : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ für eine beliebige orientierungserhaltende Abbildung $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ und orientierungsumkehrende Abbildung $g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$

d) Der Fluss $\varphi^{\tau,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ des Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = F(t, \mathbf{x})$ für feste Zeitpunkte $\tau, t \in \mathbb{R}$ und eine beliebige beschränkte[1] und stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Hinweis: $D\varphi^{\tau,t}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *hängt stetig von* τ, t *und* $\mathbf{x}$ *ab.*

Aufgabe 14.2 (6 Punkte)
Beispiel 3.8 im aktuellen Skript für diese Vorlesung[2] beschreibt einen expliziten Atlas für die Sphäre S^2, der aus genau vier Karten $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ besteht. Schreiben Sie alle Kartenübergänge für die Karten in diesem Atlas hin, und zeigen Sie, dass der Atlas orientiert ist.

Aufgabe 14.3 (3 + 5 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir durch Integration einer Differentialform den Flächeninhalt der Sphäre $S^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|\mathbf{x}\| = 1\right\}$ berechnen. Wir definieren $\omega \in \Omega^2(S^2)$ durch

$$\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{pmatrix},$$

wobei die Vektoren $\mathbf{x} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{x}}S^2 = \mathbf{x}^\perp \subset \mathbb{R}^3$ als Spalten einer 3-mal-3 Matrix betrachtet werden. Diese 2-Form hat die passende geometrische Bedeutung, denn $|\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$ ist das Volumen des von $\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ aufgespannten Parallelipipeds; da $\mathbf{x}$ ein Einheitsvektor orthogonal zu $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist, ist $|\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}, \mathbf{w})|$ dann auch der Flächeninhalt des von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Parallelogramms.
Sei $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i\}_{i=1}^4$ der in Aufgabe 14.2 (und Beispiel 3.8 im Skript) erwähnte orientierte Atlas auf S^2, mit entsprechenden lokalen Koordinatensystemem $S^2 \supset \mathcal{O}_i \xrightarrow{x_i} \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R}^2$ und Parametrisierungen $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{W}_i \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}_i \subset S^2$. Insbesondere ist ψ_1 gegeben durch die Kugelkoordinaten $(\theta, \phi) \in (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, d.h.

$$\mathcal{W}_1 := (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\psi_1} \mathcal{O}_1 \subset S^2, \qquad \psi_1(\theta, \phi) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi).$$

Wir berechnen $\int_{S^2} \omega$ in den folgenden Schritten:

[1] Dass F beschränkt ist, ist für diese Aufgabe nur insofern relevant, dass es die Existernz der Flussabbildung für alle $\tau, t \in \mathbb{R}$ garantiert (siehe Beispiel 4.2 im Skript über gewöhnliche Differentialgleichungen). Hierfür wären andere Bedingungen auch möglich.

[2] *Skript über Integration auf Untermannigfaltigkeiten*, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_DifferentialFormen.pdf`

a) Zeigen Sie: für $E := S^2 \backslash \mathcal{O}_1$ und $i = 2, 3, 4$ ist $x_i(\mathcal{O}_i \cap E) \subset \mathcal{W}_i$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

b) Laut Satz 3.18 im Skript gilt wegen Teilaufgabe (a) jetzt

$$\int_{S^2} \omega = \int_{\mathcal{W}_1} \omega_{\psi_1(\theta,\phi)} \big(\partial_\theta \psi_1(\theta,\phi), \partial_\phi \psi_1(\theta,\phi)\big)\, d\theta\, d\phi.$$

Berechnen Sie dieses Integral.

Insgesamt: **23 Punkte**

Die folgende Aufgabe wird teilweise in den Übungen besprochen, ist aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 14.A
In der Vorlesung wurde der Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ als Bild der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(\theta,\phi) := 2\mathbf{v}(\theta) + (\cos\phi)\mathbf{v}(\theta) + (\sin\phi)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} (2+\cos\phi)\cos\theta \\ (2+\cos\phi)\sin\theta \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

definiert, wobei $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor $(0,0,1)$ bezeichnet und $\mathbf{v}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Sei

$$\mathbf{n}(\theta,\phi) := (\cos\phi)\mathbf{v}(\theta) + (\sin\phi)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

und definiere eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(\mathbb{T}^2)$ durch

$$\omega_{f(\theta,\phi)}(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \operatorname{Det}\big(\mathbf{n}(\theta,\phi) \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}\big),$$

wobei die Vektoren $\mathbf{n}(\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{v},\mathbf{w} \in T_{f(\theta,\phi)}\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ als Spalten einer 3-mal-3 Matrix betrachtet werden. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \omega = 8\pi^2,$$

und erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieses Integrals.
Hinweis: Die Einschränkung von f auf die Teilmenge $(0,2\pi)\times(0,2\pi) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine lokale Parametrisierung, die fast alle Punkte in $\mathbb{T}^2$ im Bild hat.