Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 16: Musterlösungen

Aufgabe 16.A
Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, und $V^* := \Lambda^1 V^*$ sein Dualraum. Beweisen Sie:

a) Die Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k \neq 0 \in \Lambda^k V^*$.

Lösung:
Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in V^*$ linear unabhängig, dann sind diese die ersten k Vektoren in einer Basis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von V^*. Jede Basis von V^* ist auch die Dualbasis einer Basis $e_1, \dots, e_n$ von V: um das zu sehen, betrachtet man den kanonischen Isomorphismus[1]

$$\Phi : V \to (V^*)^*, \qquad \Phi(v)(\lambda) := \lambda(v),$$

nimmt die Dualbasis $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^* \in (V^*)^*$ von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und definiert dann $e_i := \Phi^{-1}(\lambda_i^*)$ für $i = 1, \dots, n$. Jetzt gilt $\lambda_i(e_j) = 1$ für $i = j$ und $\lambda_i(e_j) = 0$ sonst, also laut Aufgabe 4.1(5) im Skript,

$$\begin{aligned}(\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n)(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \left(\lambda_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\sigma(n)}\right)(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} \lambda_{\sigma(1)}(e_1) \ldots \lambda_{\sigma(n)}(e_n) = \lambda_1(e_1) \ldots \lambda_n(e_n) = 1.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n = (\lambda_1 \wedge \ldots \lambda_k) \wedge (\lambda_{k+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_n) \neq 0$ und daher $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k \neq 0$. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ andererseits linear abhängig, dann kann eins der λ_i als lineare Kombination der Anderen geschrieben werden; zur Einfachheit nehmen wir an,

$$\lambda_1 = c_2 \lambda_2 + \ldots + c_k \lambda_k$$

für Konstanten $c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Es folgt,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k = \left(\sum_{j=2}^k c_j \lambda_j\right) \wedge \lambda_2 \wedge \ldots \wedge \lambda_k = \sum_{j=2}^k c_j \lambda_j \wedge \lambda_2 \wedge \ldots \wedge \lambda_k = 0,$$

da $\lambda_j \wedge \lambda_j = 0$ für alle j. Das Argument geht analog, falls nicht λ_1 sondern ein anderes λ_i sich als lineare Kombination der Anderen schreiben lässt.

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k} \to \Lambda^k V^*, \qquad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$$

antisymmetrisch.

[1] Vorsicht: die Abbildung $\Phi : V \to (V^*)^*$ ist für jeden Vektorraum kanonisch definiert, linear und injektiv, aber nur im Fall $\dim V < \infty$ darf man immer annehmen (weil $\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^*$), dass sie ein Isomorphismus ist.

Lösung:
Zu zeigen ist, dass für beliebige i, j mit $1 \leqslant i < j \leqslant k$,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_i \wedge \ldots \wedge \lambda_j \wedge \ldots \wedge \lambda_k = -\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_j \wedge \ldots \wedge \lambda_i \wedge \ldots \wedge \lambda_k.$$

Für 1-Formen α, β gilt immer $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. Durch $j - i$ Vertauschungen kann man λ_j auf den Platz vor λ_i schieben, also

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_i \wedge \ldots \wedge \lambda_j \wedge \ldots \wedge \lambda_k = (-1)^{j-i} \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_{i-1} \wedge \lambda_j \wedge \lambda_i \wedge \ldots \wedge \lambda_{j-1} \wedge \lambda_{j+1} \wedge \lambda_k.$$

Durch $j - 1 - i$ weitere Vertauschungen wird jetzt λ_i auf den Platz zwischen λ_{j-1} und λ_{j+1} gebracht:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_{i-1} \wedge \lambda_j \wedge \lambda_i \wedge \ldots \wedge \lambda_{j-1} \wedge \lambda_{j+1} \wedge \lambda_k \\ &\qquad = (-1)^{j-1-i} \lambda_1 \wedge \ldots \lambda_{i-1} \wedge \lambda_j \wedge \lambda_{i+1} \ldots \wedge \lambda_{j-1} \wedge \lambda_i \wedge \lambda_{j+1} \wedge \ldots \wedge \lambda_k. \end{aligned}$$

Das gewünschte Resultat folgt, weil $(-1)^{j-i}(-1)^{j-1-i} = -1$.

c) Sei $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis und $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ ihre Dualbasis. Dann gilt für alle n-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \lambda_1(e_1) & \cdots & \lambda_1(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n(e_1) & \cdots & \lambda_n(e_n) \end{pmatrix} e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*. \tag{1}$$

Hinweis: Definieren Sie ein Element von $\omega \in \Lambda^n(V^*)^*$ *durch* $\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \frac{\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n}{e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*}$.

Lösung:
Weil $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis ist, gilt wegen des Arguments in Teilaufgabe (a), $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^* \neq 0$, und zwar dieses Element ist eine Basis des 1-dimensionalen Vektorraums $\Lambda^n V^*$. Es folgt, dass für jedes n-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$ eine eindeutige Konstante $\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n = \omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$$

existiert. Weil das Dachprodukt multilinear ist, ist die Abbildung

$$V^* \times \ldots \times V^* \to \mathbb{R}, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

auch multilinear ist, und aus Teilaufgabe (b) folgt, dass ω dazu antisymmetrisch ist, also gehört ω zum Vektorraum $\Lambda^n(V^*)^*$, der 1-dimensional ist, weil $\dim V^* = \dim V = n$. Ein zweites Element dieses 1-dimensionalen Vektorraums wird durch

$$\omega'(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \lambda_1(e_1) & \cdots & \lambda_1(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n(e_1) & \cdots & \lambda_n(e_n) \end{pmatrix}$$

definiert, da die Determinante einer Matrix multilinear und antisymmetrisch von ihren Reihen abhängt. Außerdem gilt

$$\omega(e_1^*, \ldots, e_n^*) = 1 = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \omega'(e_1^*, \ldots, e_n^*),$$

und da $\dim \Lambda^1(V^*)^* = 1$, folgt $\omega = \omega'$.

Jetzt betrachten wir eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand, mit lokalem Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^m$ und entsprechenden Koordinaten $x_1, \dots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Es seien $f_1, \dots, f_k : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen. Zeigen Sie:

d) Im Fall $k = n$ gilt $df_1 \wedge \dots \wedge df_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$

Bemerkung: Als wichtiger Spezialfall nimmt man für $f_1, \dots, f_n$ ein zweites Koordinatensystem $y = (y_1, \dots, y_n) : \mathcal{O} \to \mathbb{H}^m$. Dann sind beide Seiten in jedem Punkt $p \in \mathcal{O}$ garantiert nichttrivial, und die Matrix wird die Jacobimatrix des Kartenübergangs $y \circ x^{-1}$ im Punkt $x(p) \in \mathcal{W}$.

Lösung:
Wir bezeichnen mit $e_1, \dots, e_m \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{O})$ die durch $x : \mathcal{O} \to \mathbb{H}^m$ bestimmte Koordinatenvektorfelder; die partiellen Ableitungen der Funktionen $f_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $p \in \mathcal{O}$ sind dann per Definition durch

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) := (df_i)_p(e_j(p))$$

gegeben. Weil $(dx_1)_p, \dots, (dx_m)_p \in \Lambda^1 T_p^* M$ die Dualbasis von $e_1(p), \dots, e_m(p) \in T_p M$ ist, folgt das gewünschte Resultat direkt aus Teilaufgabe (c), indem man für einen beliebigen Punkt $p \in M$, $\lambda_i := (df_i)_p$ und $e_i := e_i(p)$ für $i = 1, \dots, m$ einsetzt.

e) Im Fall $M := \mathcal{U}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist ein Punkt $p \in \mathcal{U}$ ein kritischer Punkt von $f := (f_1, \dots, f_k) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ genau dann, wenn die stetige k-Form $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \in \Omega_0^k(\mathcal{U})$ im Punkt p verschwindet.[2]

Lösung:
Im Fall $k > n$ verschwindet $df_1 \wedge \dots \wedge df_k$ automatisch, weil alle k-Formen auf $\mathcal{U}$ trivial sind, und das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ kann ebenfalls nie surjektiv sein, also ist jeder Punkt kritisch. Im Fall $k \leqslant n$ schreiben wir die Jacobimatrix von f in der Form

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \vdots \\ \nabla f_k(p) \end{pmatrix},$$

mit den Gradienten als Reihen betrachtet. So ist $Df(p)$ genau dann surjektiv, wenn die Gradienten $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind. Der musikalische Isomorphismus

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\flat} \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*, \qquad \mathbf{v}^\flat(\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

identifiziert $\nabla f_j(p) \in \mathbb{R}^n$ mit $(df_j)_p \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$, also sind die Gradienten $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p) \in \mathbb{R}^n$ genau dann linear unabhängig, wenn die Differentiale $(df_1)_p, \dots, (df_k)_p \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ linear unabhängig sind. Laut Teilaufgabe (a) ist dies genau dann der Fall, wenn $(df_1)_p \wedge$

[2] Zur Erinnerung: $p \in \mathcal{U}$ heißt ein **kritischer Punkt** von $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$, falls das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ in diesem Punkt nicht surjektiv ist.

$\ldots \wedge (df_k)_p \neq 0 \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$.

Aufgabe 16.B
Es seien $m \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $\omega \in \Omega_0^m(M)$ die von der Orientierung bestimmte Volumenform. Auf $\mathbb{R}^n$ selbst wählen wir die *kanonische* Orientierung, für die die Identitätsabbildung $(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Karte ist, und bezeichnen mit

$$\mu := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Standardvolumenform auf $\mathbb{R}^n$. Für einen Punkt $p \in M$ und eine Basis $X_1, \ldots X_m \in T_pM$ gilt immer $\omega(X_1, \ldots, X_m) \neq 0$; wir nennen diese Basis **positiv** bzw. **negativ orientiert**, falls $\omega(X_1, \ldots, X_m)$ positiv bzw. negativ ist. Wichtig zu beachten ist, dass diese Definition von der Reihenfolge der Basisvektoren abhängt, z.B. wenn $X_1, \ldots, X_m$ eine positiv orientierte Basis ist, dann ist $X_2, X_1, X_3, \ldots, X_m$ eine negativ orientierte Basis. Beweisen Sie:

a) Im Fall $m \geqslant 2$ betrachten wir ∂M mit der Randorientierung. Es sei $\nu \in T_pM \backslash T_p(\partial M)$ ein auswärts gerichteter Tangentialvektor in einem Punkt $p \in \partial M$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{m-1}$ von $T_p(\partial M)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu, X_1, \ldots, X_{m-1}$ eine positiv orientierte Basis von T_pM ist.

Lösung:
Wir wählen eine orientierte Karte für M um p und bezeichnen mit $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^m$ das dadurch bestimmte Koordinatensystem. Bzgl. der Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ in $\mathcal{O}$ ist die Volumenform

$$\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

für eine positive Funktion $f : \mathcal{O} \to (0, \infty)$. Per Definition der Randorientierung gehören die Koordinaten $x_2, \ldots, x_m : \mathcal{O} \cap \partial M \to \mathbb{R}$ außerdem zu einer orientierten Karte für ∂M um p, also ist die entsprechende Volumenform ω^∂ für ∂M gegeben in $\mathcal{O} \cap \partial M$ durch

$$\omega^\partial = g\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m$$

für eine ebenfalls positive Funktion $g : \mathcal{O} \cap \partial M \to (0, \infty)$. Wir definieren die positive Funktion $h := f/g$ auf $\mathcal{O} \cap \partial M$ und schreiben

$$\omega = h\, dx_1 \wedge \omega^\partial \quad \text{auf} \quad \mathcal{O} \cap \partial M.$$

Jetzt betrachten wir eine Basis $X_1, \ldots, X_{m-1}$ von $T_p(\partial M)$ und ein auswärts gerichter Vektor $\nu \in T_pM \backslash T_p(\partial M)$. Weil die Koordinaten $\mathcal{O}$ mit einer Teilmenge des Halbraums $\mathbb{H}^m = \{x_1 \leqslant 0\}$ identifizieren, heißt "auswärts gerichtet" konkret, dass ν die Form

$$\nu = ae_1(p) + \sum_{j=1}^{m-1} c_j X_j \quad \text{mit} \quad a > 0,\ c_1, \ldots, c_{m-1} \in \mathbb{R}$$

hat, wobei e_1 das zur ersten Koordinate entsprechende Koordinatenvektorfeld auf $\mathcal{O}$ bezeichnet. Wegen Multilinearität und Antisymmetrie gilt also

$$\begin{aligned}\omega_p(\nu, X_1, \ldots, X_{m-1}) &= a\omega(e_1(p), X_1, \ldots, X_{m-1}) = ah(p) \cdot (dx_1 \wedge \omega^\partial)_p(e_1(p), X_1, \ldots, X_{m-1}) \\ &= ah(p) \frac{m!}{1!(m-1)!} \operatorname{Alt}((dx_1)_p \otimes \omega_p^\partial)(e_1(p), X_1, \ldots, X_{m-1}).\end{aligned}$$

Die letzte Zeile kann als Summe von $(dx_1)_p \otimes \omega_p^\partial$ ausgewertet auf allen Permutationen von $(e_1(p), X_1, \ldots, X_{m-1})$ geschrieben werden, aber da x_1 auf ∂M konstant ist gilt $(dx_1)_p(X_j) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m-1$, also verschwindet diese Auswertung bei allen Permutationen, die den ersten Vektor $e_1(p)$ mit einem Anderen ersetzen. Es reicht deswegen, nur Permutationen der Vektoren $X_1, \ldots, X_{m-1}$ zu betrachten, und so gilt

$$\begin{aligned}
\omega_p(\nu, X_1, \ldots, X_{m-1}) &= ah(p)m\frac{1}{(m-1)!}\sum_{\sigma\in S_{m-1}}(-1)^{|\sigma|}((dx_1)_p \otimes \omega_p^\partial)(e_1(p), X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m-1)}) \\
&= \frac{ah(p)m}{(m-1)!}\sum_{\sigma\in S_{m-1}}(-1)^{|\sigma|}\omega_p^\partial(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m-1)}) \\
&= ah(p)m \cdot \mathrm{Alt}(\omega_p^\partial)(X_1, \ldots, X_{m-1}) = ah(p)m \cdot \omega_p^\partial(X_1, \ldots, X_{m-1}),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Relation $\omega_p^\partial = \mathrm{Alt}(\omega_p^\partial)$ benutzt wird, da ω_p^∂ schon antisymmetrisch ist. Diese Berechnung beweist, dass $\omega_p(\nu, X_1, \ldots, X_{m-1})$ genau dann positiv ist, wenn $\omega_p^\partial(X_1, \ldots, X_{m-1})$ positiv ist.

b) Wir betrachten den Fall $m := n-1$ und $\omega = \iota_\nu\mu$ für ein Normalenvektorfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^n$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{n-1}$ von T_pM ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu(p), X_1, \ldots, X_{n-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathbb{R}^n$ ist.

Lösung:
Für $\omega = \iota_\nu\mu$ gilt

$$\omega_p(X_1, \ldots, X_{m-1}) = \mu_p(\nu(p), X_1, \ldots, X_{m-1}),$$

also beide sind zusammen entweder positiv oder negative.

c) Im Fall $n = 3$ mit $M := \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge ist für jeden Punkt $p \in \mathcal{U}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ das Tripel $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ immer eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$.

Lösung:
Nach Aufgabe 15.1(e) wird das Kreuzprodukt durch $\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat = \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu$ charakterisiert. Mit Hilfe der Relation (15) im Skript berechnen wir,

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mu(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\
&= \mathbf{v}^\flat(\mathbf{v})\mathbf{w}^\flat(\mathbf{w}) - \mathbf{v}^\flat(\mathbf{w})\mathbf{w}^\flat(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle \\
&= \|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^2.
\end{aligned}$$

Dies ist wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leqslant \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ immer nichtnegativ, und es verschwindet nur dann, wenn Gleichheit bei der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erfüllt wird—dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear abhängig sind.

Aufgabe 16.C
Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ ein offener Quader und $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\mathrm{div}(\mathbf{X}) = 0$. Aus einem in der Vorlesung bewiesenen Resultat folgt, dass $\mathbf{X} = \mathrm{rot}(\mathbf{V})$ für ein Vektorfeld $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$. Aber $\mathbf{V}$ ist in dieser Aussage nicht eindeutig. Angenommen, $\mathbf{V}' \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ sei ein weiteres Vektorfeld mit $\mathrm{rot}(\mathbf{V}') = \mathbf{X}$. Was können Sie über $\mathbf{V} - \mathbf{V}'$ sagen? Können Sie die Menge $\{\mathbf{A} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U}) \mid \mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{X}\}$ genau beschreiben?

Lösung:
Gilt $\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = \mathrm{rot}(\mathbf{V}') = \mathbf{X}$, dann erfüllt das Vektorfeld $\mathbf{Y} := \mathbf{V} - \mathbf{V}'$ die Bedingung $\mathrm{rot}(\mathbf{Y}) = 0$. Es folgt, dass $\mathbf{Y}$ der Gradient einer C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ist, also kann die Menge aller Vektorfelder $\mathbf{A} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ mit $\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \mathbf{X}$ als

$$\left\{\mathbf{A} = \mathbf{V} + \nabla f \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U}) \;\middle|\; f \in C^2(\mathcal{U})\right\}$$

beschrieben werden. Die Funktion f in dieser Beschreibung ist nicht eindeutig, aber zwei Funktionen bestimmen das gleiche Vektorfeld genau dann, wenn sie sich nur durch Addition einer Konstante unterscheiden. Es gibt also eine Bijektion zwischen dieser Menge von Vektorfeldern und dem Quotientenraum $C^2(\mathcal{U})/\mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R} \subset C^2(\mathcal{U})$ als Raum der konstanten Funktionen $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$ betrachtet wird.

Aufgabe 16.D
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte 2-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir versehen Ω mit der kanonischen Orientierung, für welche eine orientierte Karte um jeden inneren Punkt $p \in \Omega \backslash \partial\Omega$ durch die kartesischen Koordinaten $x, y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert wird, und versehen $\partial\Omega$ ebenfalls mit der entsprechenden Randorientierung.
Welche geometrische Bedeutung hat das Integral $I(\Omega) := \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$?

Lösung:
Der Satz von Stokes impliziert:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \int_{\Omega} d\left(\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)\right) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(dx \wedge dy - dy \wedge dx) = \int_{\Omega} dx \wedge dy.$$

Die 2-Form $dx \wedge dy$ ist die Standardvolumenform von $\mathbb{R}^2$, das Integral ist also der Flächeninhalt (d.h. Lebesgue-Maß) von Ω.

Aufgabe 16.E
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine injektive C^1-Funktion mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Drücken Sie das Integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ als Integral einer 1-Form auf einer 1-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ aus. Was ist die geometrische Bedeutung dieses Integrals?

Lösung:
Man kann *fast* Satz 1.18 im Skript anwenden, um zu zeigen, dass $M := \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit mit Rand ist. Der einzige Makel ist, dass Satz 1.18 nichts über Ränder sagt, aber dieses Problem kann man beheben, indem man γ als C^1-Funktion auf ein offenenes Intervall $(a - \epsilon, b + \epsilon)$ erweitert und dann den Satz anwendet.
In einem beliebigen Punkt $\gamma(t) \in M$ besteht der Tangentialraum $T_{\gamma(t)}M \subset \mathbb{R}^n$ aus allen Vielfachen des nichttrivialen Vektors $\gamma'(t)$. Wir können also eine 1-Form $\omega \in \Omega^1_0(M)$ durch

$$\omega_{\gamma(t)}(c\gamma'(t)) := \|\gamma'(t)\| \cdot c \qquad \text{für} \qquad c \in \mathbb{R}$$

definieren. Falls $\|c\gamma'(t)\| = |c|\|\gamma'(t)\| = 1$ gilt dann $|\omega_{\gamma(t)}(c\gamma'(t))| = 1$, was heißt, ω ist eine Volumenform auf M. Wir versehen M mit der Orientierung, die dieser Volumenform entspricht: das Integral $\int_M \omega$ ist dann die Länge der durch γ parametrisierten Kurve. Wir behaupten: dieses Integral ist auch $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$. Zu diesem Zweck betrachten wir

$$\mathbb{R} \supset \mathcal{W} := (a, b) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O} := \gamma((a, b)) \subset M$$

als lokale Parametrisierung. Für das entsprechende Koordinatensystem $\mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W}$ gilt $e_1(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ und $\omega_{\gamma(t)}(e_1(\gamma(t)) = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \|\gamma'(t)\|$, also hat ω die Koordinatendarstellung

$$\omega = f\,dx \qquad \text{für} \qquad f(p) := \|\gamma'(x(p))\|.$$

Dass die Funktion $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ immer positiv ist, zeigt, dass unsere Koordinate auf $\mathcal{O}$ zu einer orientierten Karte gehört. Es gibt genau zwei Punkte in $M \backslash \mathcal{O}$, und das Bild von beiden in beliebigen anderen Koordinatensystemen sind Nullmengen in $\mathbb{R}$, also dürfen wir jetzt Satz 3.18 im Skript anwenden, und es folgt:

$$\int_M \omega = \int_{\mathcal{W}} \omega(\gamma'(t))\,dt = \int_{(a,b)} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Fazit: dieses Integral ist die Länge der durch γ parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$.