Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 5

Schriftliche Abgabe: Dienstag 19. November 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 5.1 (3 + 3 Punkte)
Ein metrischer Raum (X, d) heißt **separabel**, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Im Folgenden sei X kompakt. Beweisen Sie:

a) Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Teilmenge $X_\epsilon \subset X$, so dass $\min_{y \in X_\epsilon} d(x, y) < \epsilon$ für alle $x \in X$.
Hinweis: betrachten Sie eine offene Überdeckung von X durch ϵ-Kugeln.

b) Die Teilmenge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{1/n} \subset X$ ist abzählbar und dicht.

Bemerkung: Eigentlich wird damit bewiesen: (1) jeder kompakte metrische Raum ist total beschränkt, und (2) jeder total beschränkte metrische Raum ist separabel.

Aufgabe 5.2 (4 + 4 Punkte)
Gegeben sei eine Folge stetiger Funktionen $\mathbf{V}_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gleichmäßig gegen $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ konvergieren. Eine Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ heißt **periodisch** mit Periode $T > 0$, falls

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gilt. Angenommen, es existieren Konstanten $C > 0$ und $R > 0$, und eine Folge $\mathbf{x}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ periodischer Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{\mathbf{x}}_n(t) = \mathbf{V}_n(\mathbf{x}_n(t))$ mit Perioden $T_n > 0$, so dass

$$\frac{1}{C} \le T_n \le C \qquad \text{und} \qquad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}_n(t)\| \le R \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie:

a) Die Folge $\mathbf{x}_n \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ hat eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Grenzfunktion $\mathbf{x} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ auch periodisch ist, mit Periode im Intervall $[1/C, C]$.

b) Die Grenzfunktion $\mathbf{x} \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$.

Hinweis 1: Die Folge T_n hat eine konvergente Teilfolge.
Hinweis 2: Für die Funktionen $\mathbf{y}_n(t) := \mathbf{x}_n(T_n t)$ gilt $\mathbf{y}_n(t + 1) = \mathbf{y}_n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Was für eine Differentialgleichung erfüllen sie? Sind ihre Ableitungen beschränkt?
Hinweis 3: Wenn die Funktionen $\mathbf{y}_n$ auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergieren und auch $\mathbf{y}_n(t+1) = \mathbf{y}_n(t)$ erfüllen, dann konvergieren sie auch auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig.

Aufgabe 5.3 (3 + 3 + 3 + 4 + 3)
Eine stetige lineare Abbildung $\mathbf{T} : X \to Y$ zwischen Banachräumen heißt **kompakt**, falls für jede beschränkte Folge $x_n \in X$ die Folge $\mathbf{T}x_n \in Y$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt. Im Folgenden bezeichnen wir mit $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit

$b > a$ und betrachten für jede ganze Zahl $k \geq 0$ den Banachraum[1] $\left(C^k(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^k}\right)$ aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : K \to \mathbb{R}$, mit Norm

$$\|f\|_{C^0} := \|f\|_\infty := \max_{t \in I} \|f(t)\|, \qquad \|f\|_{C^k} := \sum_{n=0}^{k} \|f^{(n)}\|_\infty.$$

Beweisen Sie:

a) Für einen Banachraum E ist die Identitätsabbildung $\mathbb{1} : E \to E$ kompakt genau dann, wenn jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E kompakt ist.

b) Es gibt eine beschränkte Folge in $C^0(K,\mathbb{R})$, die keine konvergente Teilfolge hat. *Hinweis: Beschreiben Sie eine Folge $f_n \in C^0(K,\mathbb{R})$ mit $\|f_n\|_{C^0} = 1$ für alle n, die punktweise gegen 0 konvergiert.*

c) Es gibt für jedes $k \geq 0$ eine beschränkte Folge in $C^k(K,\mathbb{R})$, die keine konvergente Teilfolge hat. *Hinweis: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^{k-1}-Funktion, dann ist $g(t) := \int_a^t f(s)\, ds$ von der Klasse C^k.*

d) Die lineare Abbildung $C^1(K,\mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(K,\mathbb{R})$ definiert durch Inklusion ist kompakt.

e) Die lineare Abbildung $C^k(K,\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{k-1}(K,\mathbb{R})$ definiert durch Inklusion ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ kompakt.

Insgesamt: **30 Punkte**

Die folgende Aufgabe wird teilweise in den Übungen besprochen, ist aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 5.A
Ein Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t,\mathbf{x})$ heißt **autonom**, falls die Funktion F nicht von t abhängt, d.h. F hat die Form $F(t,\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$ und ist auf $\mathbb{R} \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definiert für eine Funktion $G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$. Für ein autonomes System ist es sinnvoll, den Fluss $(\tau, t, \mathbf{y}) \mapsto \varphi^{\tau,t}(\mathbf{y})$ in der Form

$$\varphi^t := \varphi^{0,t}$$

abzukürzen. Beweisen Sie:

a) Wenn G Lipschitzstetig und der Fluss $(t,\mathbf{y}) \mapsto \varphi^t(\mathbf{y})$ des autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = G(\mathbf{x})$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathcal{U}$ definiert ist, dann existiert ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Homeo}(\mathcal{U}) : t \mapsto \varphi^t,$$

wobei die Gruppe aller Homöomorphismen $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$ mit $\mathrm{Homeo}(\mathcal{U})$ bezeichnet wird.

b) Für ein beliebig gegebenes Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t,\mathbf{x}(t))$ in $\mathbb{R}^n$ existiert ein autonomes System $\dot{\mathbf{z}}(t) = G(\mathbf{z}(t))$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass für jede Lösung $\mathbf{x}$ des Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t,\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{z}(t) := (t,\mathbf{x}(t))$ eine Lösung des Systems $\dot{\mathbf{z}}(t) = G(\mathbf{z}(t))$ ist.

[1] Dass $(C^k(K,\mathbb{R}), \| \ \|_{C^k})$ ein Banachraum ist, wurde letztes Semester in Aufgabe 3.Z bewiesen.