HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III
WiSe 2019–20

Übungsblatt 7

Schriftliche Abgabe: Dienstag 3. Dezember 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Sei X eine nichtleere Menge, $A, B \subset X$ zwei Teilmengen und $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra, die $\{A, B\}$ enthält. Des weiteren sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß mit $\mu(A) = \frac{8}{25}$, $\mu(B) = \frac{1}{4}$, und $\mu(A \cap B) = \frac{2}{25}$. Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 2 & \text{für } x \in A \setminus B, \\ -1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f μ-integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_X f\, d\mu$.

Aufgabe 7.2 (2 + 3 + 4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Beweisen Sie:

a) Gilt $|f| \le C$ für eine Konstante $C > 0$ und hat die Menge $A := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ Maß $\mu(A) < \infty$, dann ist f μ-integrierbar, und es gilt $\left|\int_X f\, d\mu\right| \le C\mu(A)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Relation $|\int_X f\, d\mu| \le \int_X |f|\, d\mu$.

b) Sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig konvergente Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$. Gilt $\mu(X) < \infty$ und ist f μ-integrierbar, dann ist f_n für alle n hinreichend groß auch μ-integrierbar, und es gilt $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Für die nächste Teilaufgabe betrachten wir ein Intervall $X := [x_0, c) \subset \overline{\mathbb{R}}$ mit $-\infty < x_0 < c \le \infty$, die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{B}([x_0, c))$, eine stetige Funktion $f : [x_0, c) \to \mathbb{R}$ und ein Maß $\mu : \mathcal{B}([x_0, c)) \to [0, \infty]$, das für alle Teilintervalle $(a, b) \subset [x_0, c)$ endlicher Länge $\mu\big((a, b)\big) = b - a$ erfüllt (s. Aufgabe 6.2). Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass f auf jedem kompakten Teilintervall $[x_0, x] \subset [x_0, c)$ μ-integrierbar ist, da f auf diesem Intervall stetig und daher beschränkt ist.

c) Die Funktion $F : [x_0, c) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) := \int_{[x_0,x]} f\, d\mu$ ist differenzierbar und erfüllt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, c)$.

Aufgabe 7.3 (5 + 4 + 3 Punkte)
In der Vorlesung wurde bewiesen, dass jede nichtnegative messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein neues Maß $\mu_f : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch $\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu$ definiert. Beweisen Sie:

a) Für zwei gegebene messbare Funktionen $f : X \to [0, \infty)$ und $g : X \to \mathbb{R}$ ist g genau dann μ_f-integrabel, wenn gf μ-integrabel ist; des Weiteren gilt $\int_A g\, d\mu_f = \int_A gf\, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Spezialfall mit g eine Treppenfunktion, dann eine nichtnegative Funktion, und erst danach den allgemeinen Fall $g : X \to \mathbb{R}$. Für die Verallgemeinerung von Treppenfunktionen zu nichtnegativen Funktionen könnte der Satz über monotone Konvergenz helfen.

b) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrabel, dann gilt für jede Folge von Teilmengen $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \in \mathcal{A}$ mit $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$.
Hinweis: Im Spezialfall $E = \emptyset$ reicht es, $\int_{E_n} |f|\, d\mu \to 0$ zu beweisen. (Warum?) Im allgemeinen Fall können Sie dann die Mengen $A_n := E_n \setminus E$ betrachten.

c) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrabel, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu$ auch für jede Folge von Teilmengen $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \in \mathcal{A}$ mit $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Hinweis: Das Komplement einer Vereinigung ist eine Schnittmenge.

Insgesamt: **25 Punkte**

Schriftliche Zusatzaufgabe 7.Z (4 Punkte)
Beweisen Sie: ist $f : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar auf $(X, \mathcal{A})$, dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \epsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt.
Hinweis: für Inspiration, siehe den Beweis von Lemma 5.21 im Buch von Salamon.

Die folgende Aufgabe wird teilweise in den Übungen besprochen, ist aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 7.A
Wir betrachten Funktionen $f : X \to E$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum E über $\mathbb{R}$. Sei $e_1, \ldots, e_n \in E$ eine Basis von E; eine beliebige Funktion $f : X \to E$ kann also eindeutig in der Form $\sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ für Funktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ geschrieben werden. Beweisen Sie:

a) $f : X \to E$ ist messbar (bzgl. der Borelschen σ-Algebra auf E) genau dann, wenn die Komponentenfunktionen $f_i : X \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ messbar sind, und in diesem Fall ist $\|f\| : X \to [0, \infty)$ auch messbar.

b) Für eine messbare Funktion $f : X \to E$ wird $\int_X \|f\|\, d\mu < \infty$ genau dann erfüllt, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ alle μ-integrabel sind.
Hinweis: ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen Sie $E := \mathbb{R}^n$ mit $e_1, \ldots, e_n$ als die Standardbasis betrachten. Für eine bestimmte Wahl der Norm $\|\ \|$ auf $\mathbb{R}^n$ ist die Aussage fast offensichtlich. Aber alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

c) Angesichts Teilaufgabe (b) nennen wir eine messbare Funktion $f = \sum_i f_i e_i : X \to E$ **μ-integrierbar**, wenn $\int_X \|f\|\, d\mu < \infty$, und für $A \in \mathcal{A}$ definieren wir nun $\int_A f\, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_A f_i\, d\mu\right) e_i \in E$. Zeigen Sie, dass diese Definition nicht von der Wahl der Basis abhängt.

d) Für einen zweiten endlich-dimensionalen normierten Vektorraum E' und eine lineare Abbildung $\mathbf{A} : E \to E'$ gilt: ist $f : X \to E$ μ-integrierbar, dann ist $\mathbf{A}f : X \to E'$ auch μ-integrierbar, und $\int_E \mathbf{A}f\, d\mu = \mathbf{A} \int_E f\, d\mu \in E'$.

Bemerkung: da $\mathbb{C}$ als 2-dimensionaler reeller Vektorraum betrachtet werden kann, folgt aus dieser Aufgabe eine Definition des Lebesgue-Integrals für komplexwertige Funktionen $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$, nämlich als

$$\int_A (u + iv)\, d\mu = \int_A u\, d\mu + i \int_A v\, d\mu \in \mathbb{C}, \qquad \text{für } u, v : X \to \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist die Abbildung $f \mapsto \int_A f\, d\mu$ vom Vektorraum der μ-integrierbaren komplexwertigen Funktionen nach $\mathbb{C}$ komplex-linear, und eine ähnliche Aussage gilt für $\mathbb{C}^n$-wertige Funktionen.