HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis III
WiSe 2019–20

Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Dieses Skript betrifft Inhalte der Vorlesung vom 21.01.2020 bis zum Semesterende.

1 Integralsätze und Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel der Vorlesung wollen wir Integration für Funktionen nicht nur auf Teilgebieten von $\mathbb{R}^n$ sondern auch auf *Untermannigfaltigkeiten* studieren. Als Motivation fangen wir mit einer Skizze von einigen wichtigen Resultaten an, die erst am Ende des Kapitels bewiesen werden können.

1.1 Gradient, Divergenz und Rotation

Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Den Gradienten einer Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ haben wir schon in Analysis II kennengelernt: wenn f stetig differenzierbar ist, ist ihr Gradient gegeben durch die einfache Formel

$$\nabla f := \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Somit definiert $\nabla f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ein **Vektorfeld** auf $\mathcal{U}$.

Für stetig differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ werden wir zwei Konstruktionen betrachten, die aus den partiellen Ableitungen von $\mathbf{X}$ gebaut sind. Die **Divergenz** von $\mathbf{X}$ ist die Funktion $\operatorname{div}\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\nabla \cdot \mathbf{X} := \operatorname{div}\mathbf{X} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}.$$

Die in Anwendungen oft verwendete Schreibweise "$\nabla \cdot \mathbf{X}$" kommt davon, dass man den Nabla-Operator ∇ informell als "Vektor" $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ betrachtet und das Pünktchen "$\cdot$" als alternative Notation für das Euklidische Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ benutzt.

Im Fall $n = 3$ gibt es eine weitere wichtige Konstruktion mit ersten partiellen Ableitungen eines Vektorfeldes $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$. Es wird durch das klassische **Kreuzprodukt** von Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ definiert: Letzteres ist

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} := \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & v_1 & w_1 \\ \mathbf{e}_2 & v_2 & w_2 \\ \mathbf{e}_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1) \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 1.1. Nehmen wir an, der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ deutet in die x-Richtung und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ liegt in der xy-Ebene. Zeigen Sie, dass $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ dann orthogonal zum von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ aufgespannten Unterraum ist, und

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \sin\theta,$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ist.
Bemerkung: Wir werden später sehen, dass das Kreuzprodukt invariant bzgl. Rotationen in $\mathbb{R}^3$ ist. Davon folgt, dass diese Relation zwischen den drei Vektoren $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ eigentlich immer gilt, nicht nur wenn $\mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \{(0,0)\}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Die **Rotation**[1] eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ auf $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ ist dann ein weiteres Vektorfeld $\operatorname{rot} \mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\nabla \times \mathbf{X} := \operatorname{rot} \mathbf{X} := \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}, \frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}, \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \right).$$

Die Divergenz und Rotation spielen die Hauptrollen in den folgenden klassischen Sätzen über Integrale. Die Aussagen betreffen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$, ein Begriff, den wir im nächsten Abschnitt wiederholen werden. Für eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit vol_k das Maß auf M, das durch den Begriff "k-dimensionales Volumen" von Teilmengen $E \subset M$ definiert wird; diese Definition hat eine gewisse intuitive Bedeutung, muss aber in den folgenden Abschnitten noch konkretisiert werden. Im Spezialfall einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, und vol_n bedeutet dann einfach das Lebesgue-Maß.

Satz 1.2 (Divergenzsatz von Gauß-Ostrogradski)**.** *Sei $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, und sei $\Omega \subset \mathcal{U}$ der kompakte Abschluss einer offenen Teilmenge in $\mathcal{U}$ mit der Eigenschaft, dass der Rand $\partial\Omega \subset \mathcal{U}$ von Ω eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir definieren $\boldsymbol{\nu} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ durch die Bedingung, dass $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ das eindeutige auswärts gerichtete Einheitsvektor orthogonal zu $\partial\Omega$ ist. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{X} \; d\mathrm{vol}_n = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle \, d\mathrm{vol}_{n-1}.$$

Satz 1.3 (Integralsatz von Stokes)**.** *Sei $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, und sei $\Sigma \subset \mathcal{U}$ eine kompakte glatt eingebette Fläche mit Rand $\partial\Sigma$. Dazu sei $\boldsymbol{\nu} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld entlang Σ mit der Eigenschaft, dass $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \Sigma$ Norm 1 hat und orthogonal zu Σ ist, und sei $\mathbf{t} : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3$ das eindeutig dadurch bestimmte Vektorfeld auf $\partial\Sigma$, so dass $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \partial\Sigma$ ein Einheitsvektor tangential zu $\partial\Sigma$ ist und $\mathbf{t}(\mathbf{x}) \times \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ in Richtung auswärts bzgl. Σ deutet. Dann gilt:*

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu} \rangle \; d\mathrm{vol}_2 = \int_{\partial\Sigma} \langle \mathbf{X}, \mathbf{t} \rangle \, d\mathrm{vol}_1.$$

Bemerkung 1.4. Sätze 1.2 und 1.3 tauchen oft in der theoretischen Physik auf, vor allem in der Elektrodynamik, wo sie wichtige Rollen bei den klassischen Maxwell-Gleichungen für die Evolution von elektrischen und magnetischen Feldern spielen. In der Physik-Literatur ist die gewöhnliche Schreibweise etwas anders, z.B. werden die Formeln in beiden Sätzen oft in so einer Form wie

$$\iiint\limits_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{X}) \, dV = \oiint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{a}, \qquad \iint\limits_\Sigma (\nabla \times \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{a} = \oint\limits_{\partial\Sigma} \mathbf{X} \cdot d\mathbf{l}$$

geschrieben. Hier ist der Divergenzsatz auf den Fall $n = 3$ spezialisiert, und die Wiederholung des Integralzeichens soll die Dimension der Mannigfaltigkeit vermitteln, über die

[1] im Englischen: **curl**

man integriert. Wenn diese Mannigfaltigkeit *geschlossen* ist, d.h. kompakt und ohne Rand, schreibt man z.B. $\oint$ statt $\int$. Im Symbol dV bezieht sich "V" auf den Begriff "Volumen" in $\mathbb{R}^3$; es handelt sich hier um das Lebesgue-Maß. Die Symbole $d\mathbf{a}$ und $d\mathbf{l}$ werden von Physikern gern als "infinitesimale Vektoren" bezeichnet, können aber konkreter als "vektorwertige Maße" interpretiert werden—sie verbinden das natürliche durch Flächeninhalt ($\mathbf{a}$ = "area") bzw. Länge ($\mathbf{l}$ = "length") definierte Maß auf der entsprechenden Mannigfaltigkeit mit dem Normalvektor $\boldsymbol{\nu}$ bzw. dem Tangentialvektor $\mathbf{t}$. Die resultierenden Integrale werden oft **Flächenintegral** bzw. **Kurvenintegral** genannt.

Beide Sätze sind Korollare einer einzigen Formel, die unter Mathematikern einfach als der **Satz von Stokes** bekannst ist: sie lautet

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{1}$$

Hier ist M im Allgemeinen eine kompakte n-dimensionale orienterte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, ω ist eine sogenannte $(n-1)$*-Form* auf M, und $d\omega$ eine n-Form, die sogenannte *äußere Ableitung* von ω. Wir werden in den nächsten Abschnitten klären müssen, was genau eine n-Form ist, wie das Integral davon auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert ist, warum die Formel (1) stimmt, und was das alles mit Vektorfeldern und Divergenz und Rotation zu tun hat.

Das Erste, was man über die Formel (1) wissen muss, ist, dass sie die natürliche Verallgemeinerung vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für höher-dimensionale Integrale ist. Dabei gibt es ein paar Aspekte, die in höheren Dimensionen interessanter sind, z.B.: jede stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ hat eine Stammfunktion, aber nicht jedes Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ ist der Gradient einer Funktion. In der abstrakteren Sprache von Differentialformen folgt das davon, dass nicht jede n-Form die äußere Ableitung einer $(n-1)$-Form ist, aber die notwendigen Bedingungen dafür sind einfach zu formulieren, und unter bestimmten Voraussetzungen topologischer Natur sind diese Bedingungen auch hinreichend. Hier noch eine Aussage zur Konsequenzen davon für die Operatoren grad, div und rot:

Satz 1.5. *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge.*

1. *Für jede Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 gilt $\nabla \times (\nabla f) = 0$.*
2. *Für jedes Vektorfeld $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ von der Klasse C^2 gilt $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$.*

Des Weiteren gilt Folgendes unter der zusätzlichen Bedingung, dass $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ ein offener Quader $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ ist:[2]

1. *Ist $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\nabla \times \mathbf{X} = 0$, dann existiert eine C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{X}$.*
2. *Ist $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\nabla \cdot \mathbf{X} = 0$, dann existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{Y} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ mit $\nabla \times \mathbf{Y} = \mathbf{X}$.*

[2] Unser Beweis dieses Satzes wird die Annahme $\mathcal{U} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ direkt nutzen, aber mit ein bisschen mehr Anstrengung könnte diese Annahme mit verschiedenen schwächeren Voraussetzungen ersetzt werden, z.B. die Aussage gilt für alle *konvexen* Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, im Grunde weil ein Quader konvex ist und alle konvexen Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ diffeomorph sind. Die *richtige* Voraussetzung für den zweiten Teil dieses Satzes ist wirklich eine topologische Bedingung: es gilt, wenn die Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ *zusammenziehbar* (auf Englisch: "contractible") ist. Das werden wir hier nicht beweisen.

Aufgabe 1.6. Beweisen Sie die Formeln $\nabla \times (\nabla f) = 0$ und $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ in der ersten Hälfte von Satz 1.5. Warum müssen wir hier annehmen, dass f bzw. $\mathbf{X}$ von der Klasse C^2 ist, d.h. warum reicht es nicht, wenn ∇f bzw. $\nabla \times \mathbf{X}$ nur differenzierbar (aber nicht stetig differenzierbar) ist?

1.2 Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$

Der Begriff *m-dimensionale Mannigfaltigkeit* kam schon mal in *Analysis II* vor, insb. in Zusammenhang mit dem Satz über implizite Funktionen, und wir werden diesen Zusammenhang unten kurz wiederholen. Grob gesagt ist eine m-Mannigfaltigkeit eine Menge, die in lokalen Umgebungen immer durch m reellen Koordinaten beschrieben werden kann. Die genaue Definition des Begriffs "Kurve" wird dann "Mannigfaltigkeit von Dimension 1", und analog soll das Wort "Fläche" eigentlich "Mannigfaltigkeit von Dimension 2" bedeuten. Das einfachste Beispiel einer Teilmenge in $\mathbb{R}^n$, die als m-dimensionale Untermannigfaltigkeit betrachtet werden kann, ist der m-dimensionale lineare Unterraum

$$\mathbb{R}^m \times \{0\} := \left\{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m\right\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Aber eine Untermannigfaltigkeit muss nicht immer so "flach" sein wie dieser Unterraum; sie darf auch "gekrümmt" sein. In der folgenden Definition erlaubt man diese Krümmung, indem man das Bild der Menge in (2) unter einer differenzierbaren Transformation betrachtet. Insofern dient der Unterraum in (2) als lokales Modell für jede m-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$, aber die Untermannigfaltigkeit selbst muss nicht so flach aussehen.

Definition 1.7. Es seien $n \geqslant m \geqslant 0$ ganze Zahlen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$**, falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ nach einer offenen Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$M \cap \mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

wobei $\mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ der in (2) definierte Unterraum bezeichnet. Wir nennen M auch eine **Untermannigfaltigkeit von Dimension m und von der Klasse C^k**, und der C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ heißt eine **Karte** für M um den Punkt p.[3]

Im Fall $k = \infty$ heißt M auch eine **glatte Untermannigfaltigkeit**.

Bemerkung 1.8. Im Allgemeinen ist der Begriff *Mannigfaltigkeit* etwas abstrakter als bei der obigen Definition, z.B. ist eine Mannigfaltigkeit i.A. ein topologischer Raum an sich, und muss nicht als Teilmenge eines Euklidischen Raums gegeben sein. Dieser abstraktere Begriff von Mannigfaltigkeit ist Hauptthema von Vorlesungen über Differentialgeometrie oder Differentialtopologie, aber in der jetzigen Vorlesung werden wir nur Mannigfaltigkeiten betrachten, die als Teilmengen von Euklidischen Räumen vorkommen und deswegen die Bedingungen in Definition 1.7 erfüllen. Unter diesem Umstand erlauben wir uns auch die Terminologie manchmal zu verkürzen, indem wir statt "m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$" einfach **m-Mannigfaltigkeit** schreiben.[4]

[3] Im Englischen heißt *Mannigfaltigkeit* "manifold", und *Karte* heißt "chart". Letzteres darf man nicht mit dem Wort "map" verwechseln, das im mathematischen Kontext nicht *Karte* sondern *Abbildung* bedeutet.

[4] Eigentlich haben wir keine Allgemeinheit verloren, denn laut einem grundlegenden Satz in der Differentialtopologie sind alle abstrakten m-Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu m-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ für $n > m$ hinreichend groß. Aber das muss man für die Zwecke dieser Vorlesung nicht wissen.

Bemerkung 1.9. Wenn eine Mannigfaltigkeit ohne das Wort "glatt" oder das Präfix "C^k" erwähnt wird, sollten Sie in der Regel davon ausgehen, dass es sich um eine *glatte* Mannigfaltigkeit handelt. Diese Konvention ist auch in der Differentialgeometrie üblich, wo man meistens *nur* glatte Mannigfaltigkeiten betrachtet. Man spricht auch manchmal von *differenzierbaren* Mannigfaltigkeiten, um die Differenzierbarkeit der Karten zu betonen und diesen Begriff vom allgemeineren Begriff der *topologischen* Mannigfaltigkeiten zu unterscheiden, bei denen die Karten Homöomorphismen aber nicht unbedingt differenzierbar sein müssen.

Definition 1.10. Eine m-Mannigfaltigkeit heißt eine **Kurve** im Fall $m = 1$ und eine **Fläche** im Fall $m = 2$.

Bemerkung 1.11. In manchen Quellen werden auch Bilder in $\mathbb{R}^n$ von bestimmten *nicht-injektiven* C^k-Funktionen auf Gebieten in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ als "Kurven" bzw. "Flächen" bezeichnet. Um Definition 1.10 von diesem allgemeineren Begriff zu unterscheiden, fügen wir manchmal die Adjektive "eingebettet" vor "Kurve" bzw. "Fläche" ein.

Definition 1.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$ ein Punkt. Der **Tangentialraum** von M im Punkt p ist der m-dimensionale Vektorraum

$$T_pM := \big\{X \in \mathbb{R}^n \bigm| X = \gamma'(0) \text{ für ein } \epsilon > 0 \text{ und eine stetig differenzierbare Funktion} \\ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n \text{ mit Bild in } M \text{ und } \gamma(0) = p\big\}.$$

In anderen Worten: T_pM ist die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die als Geschwindigkeitsvektoren von stetig differenzierbaren Wegen in M durch p vorkommen. Dass $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ tatsächlich ein linearer Unterraum ist, sieht man wie folgt. Sei $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Karte um p, also φ ist ein C^k-Diffeomorphismus für ein $k \geqslant 1$ mit $p \in \mathcal{U}$ und $M \cap \mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Für eine beliebige C^1-Funktion $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit Bild in M und $\gamma(0) = p$ dürfen wir durch Verkleinern von $\epsilon > 0$ o.B.d.A. $\gamma(t) \in \mathcal{U}$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ annehmen, und dann ist $\varphi \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{V}$ eine stetig differenzierbare Funktion nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild im linearen Unterraum $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Es folgt, dass $(\varphi \circ \gamma)'(0)$ auch in $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ ist, und wegen der Kettenregel, $\gamma'(0) = D\varphi^{-1}(\varphi(p))(\varphi \circ \gamma)'(0)$. Aber $(\varphi \circ \gamma)'(0)$ kann ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ sein, denn für jedes $Y \in \mathbb{R}^m$ könnte man z.B. $\epsilon > 0$ hinreichend klein wählen und dann $\gamma(t) := \varphi^{-1}(\varphi(p) + (tY, 0))$ für $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definieren. Dieses Argument beweist:

$$T_pM = D\varphi^{-1}(\varphi(p))\,(\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

also ist T_pM das Bild eines linearen Unterraums unter dem linearen Isomorphismus $D\varphi^{-1}(\varphi(p)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und ist daher auch ein linearer Unterraum.

Beispiel 1.13. Jede offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Hier reicht es, eine einzelne Karte zu definieren, nämlich die Identitätsabbildung $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Jeder Punkt $p \in \mathcal{U}$ hat dann Tangentialraum $T_pM = \mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.14. Die Menge der Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die sogenannte **n-Sphäre**

$$S^n := \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| x_1^2 + \ldots x_{n+1}^2 = 1\big\},$$

und der Tangentialraum in einem Punkt $\mathbf{x} \in S^n$ ist das orthogonale Komplement von $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$T_{\mathbf{x}}S^n = \big\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \bigm| \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = 0\big\}.$$

Beide Aussagen können ziemlich direkt bewiesen werden, aber sie folgen auch als leichte Anwendungen von Satz 1.15 unten.

Beispiele wie $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind am einfachsten durch die folgende Variante des Satzes über implizite Funktionen zu verstehen, der oft als *Satz über den regulären Wert*[5] gekennzeichnet wird:

Satz 1.15. *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^q$ eine C^k-Funktion für $k \in \mathbb{N}$, und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ ein regulärer Wert von f, d.h. $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ ist für alle $\mathbf{x} \in f^{-1}(\mathbf{y})$ surjektiv. Dann ist $M := f^{-1}(\mathbf{y})$ eine $(n-q)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, und für jedes $\mathbf{x} \in M$ gilt $T_{\mathbf{x}}M = \ker Df(\mathbf{x})$.*

Beweis. Die Aussage ist ein leichtes Korollar vom Satz über den lokalen Diffeomorphismus, auch bekannt als der *Umkehrsatz* (s. [Bau12, §6.5]). Sei $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(\mathbf{y})$, mit $Df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ surjektiv. Der Kern dieser linearen Abbildung ist dann ein $(n-q)$-dimensionaler Unterraum $K := \ker Df(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^n$, also können wir einen linearen Isomorphismus $\Phi : K \to \mathbb{R}^{n-q}$ wählen. Dazu wählen wir eine lineare Projektion $\Pi : \mathbb{R}^n \to K$ und betrachten die C^k-Funktion $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\varphi(\mathbf{x}) := (\Phi\Pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}))\,.$$

Dann gilt

$$D\varphi(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} = (\Phi\Pi\mathbf{v}, Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v})\,,$$

und die rechte Seite verschwindet genau dann, wenn $\mathbf{v} \in \ker Df(\mathbf{x}_0) = K$ und zugleich $\Pi\mathbf{v} = 0$, was zusammen $\mathbf{v} = 0$ impliziert. Das Differential $D\varphi(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist also injektiv, und daher ein Isomorphismus. Es folgt nun vom Umkehrsatz, dass φ einen C^k-Diffeomorphismus von einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ von $\mathbf{x}_0$ nach einer Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von $\varphi(\mathbf{x}_0) = (0, \mathbf{y})$ definiert, und $\mathbf{x} \in f^{-1}(\mathbf{y})$ genau dann, wenn $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n-q} \times \{0\}$, also kann $\varphi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ als Karte betrachtet werden.

Die Kettenregel impliziert für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit Bild in $M = f^{-1}(\mathbf{y})$ und $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$,

$$Df(\mathbf{x}_0)\gamma'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\mathbf{y} = 0,$$

also folgt $T_{\mathbf{x}_0}M \subset \ker Df(\mathbf{x}_0)$. Da $T_{\mathbf{x}_0}M$ und $\ker Df(\mathbf{x}_0)$ beide Vektorräume mit der gleichen Dimension $n - q$ sind, sind sie daher gleich. □

Aufgabe 1.16. Beweisen Sie als Anwendung von Satz 1.15 alle Aussagen über die n-Sphäre in Beispiel 1.14.

Andererseits sind manche Beispiele nicht sofort als Niveauflächen zu realisieren, aber besser durch Parametrisierungen:

Beispiel 1.17. Wir parametrisieren einen Kreis in der xy-Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{v}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta, 0) \in \mathbb{R}^3$ für $\theta \in \mathbb{R}$, und bezeichnen die Basisvektor in die z-Richtung mit $\mathbf{e}_z := (0, 0, 1)$. Der 2-dimensionale **Torus** $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kann dann als Bild (s. Abbildung 1) der folgenden Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert werden:

$$f(\theta, \phi) := 2\mathbf{v}(\theta) + (\cos\phi)\mathbf{v}(\theta) + (\sin\phi)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} (2 + \cos\phi)\cos\theta \\ (2 + \cos\phi)\sin\theta \\ \sin\phi \end{pmatrix}.$$

[5] Für eine C^1-Funktion $\mathbb{R}^n \supset \mathcal{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$ heißt $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ein **kritischer Punkt** von f, falls $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ nicht surjektiv ist, und der Punkt $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^q$ heißt in diesem Fall ein **kritischer Wert**. Ein Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ heißt genau dann ein **regulärer Wert**, wenn er kein kritischer Wert ist.

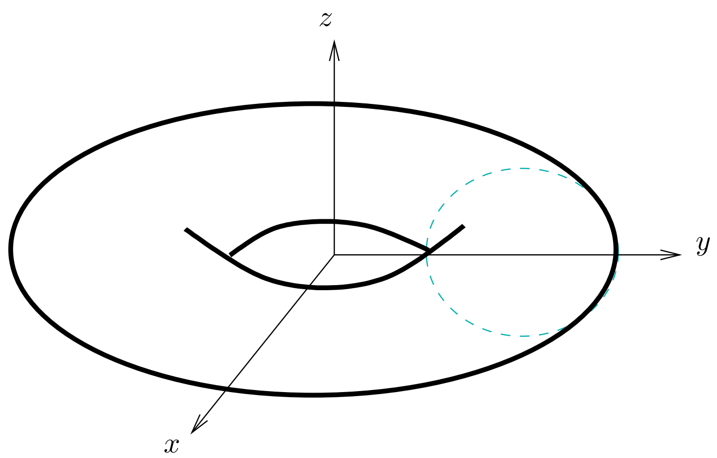

Abbildung 1: Der Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Satz 1.18. *Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ eine C^k-Funktion für $k \in \mathbb{N}$, und $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ ein Punkt, in dem das Differential $Df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Dann hat $\mathbf{x}_0$ eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$, so dass $\Sigma := f(\mathcal{V}) \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, und für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ist $T_{f(\mathbf{x})}\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ das Bild von $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.*[6]

Beweis. Wir wählen einen $(n-m)$-dimensionalen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ komplementär zum Bild der injektiven Abbildung $Df(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, und einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{n-m} \to V$. Die Funktion $F : \mathcal{O} \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f(\mathbf{x}) + \Phi\mathbf{y}$$

erfüllt dann

$$DF(\mathbf{x}_0, 0)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = Df(\mathbf{x}_0)\mathbf{v} + \Phi\mathbf{w},$$

also ist $DF(\mathbf{x}_0, 0) : \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$ surjektiv, und daher ein Isomorphismus. Es folgt, dass F einen C^k-Diffeomorphismus von einer Umgebung $\mathcal{V}' \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^{n-m}$ von $(\mathbf{x}_0, 0)$ nach einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $F(\mathbf{x}_0, 0) = f(\mathbf{x}_0)$ definiert. Sei $\mathcal{V} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid (\mathbf{x}, 0) \in \mathcal{V}'\}$. Da $F|_{\mathcal{V}'} : \mathcal{V}' \to \mathcal{U}$ bijektiv ist, ist ein Punkt $\mathbf{z} \in \mathcal{U}$ genau dann in $f(\mathcal{V})$, wenn $\mathbf{z} \in F(\mathcal{V} \times \{0\})$, also ist $\varphi := (F|_{\mathcal{V}'})^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}'$ eine Karte um $f(\mathbf{x}_0)$.

Die Injektivität von $Df(\mathbf{x}_0)$ ist eine offene Bedingung, und da Df stetig ist, können wir dann für eine hinreichend kleine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$ von $\mathbf{x}_0$ o.B.d.A. annehmen, dass $Df(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ injektiv ist. Für einen beliebigen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{V}$ mit $\gamma(0) = \mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ist $f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg durch $f(\mathbf{x})$ mit Bild in $\Sigma = f(\mathcal{V})$, also folgt

$$(f \circ \gamma)'(0) = Df(\mathbf{x})\gamma'(0) \in T_{f(\mathbf{x})}\Sigma,$$

was zeigt, dass das Bild von $Df(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Unterraum von $T_{f(\mathbf{x})}\Sigma$ ist. Da beide Vektorräume von der gleichen Dimension m sind, sind sie also gleich. ☐

Aufgabe 1.19. Zeigen Sie als Anwendung von Satz 1.18, dass der Torus $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ in Beispiel 1.17 eine glatte 2-Mannigfaltigkeit ist.

[6] Satz 1.18 ist nur zur Information, aber kam in der Vorlesung nicht vor.

2 Integration in lokalen Koordinaten

Der Begriff *Differenzierbarkeit* wurde bisher nur für Funktionen auf offenen Teilmengen von Euklidischen Räumen definiert. Wenn $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von Dimension $m < n$ ist, dann ist M keine offene Teilmenge, aber wir möchten trotzdem sagen können, ob eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar bzw. glatt ist. Dafür brauchen wir lokale Koordinaten.

2.1 Karten und Koordinaten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Karte, also ist φ von der Klasse C^k, und es gilt $M \cap \mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$. Die Einschränkung von φ auf $M \cap \mathcal{U}$ kann dann in der Form $\varphi|_{M\cap\mathcal{U}} = (x, 0)$ für eine eindeutig bestimmte $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion

$$x = (x_1, \dots, x_m) : M \cap \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$$

geschrieben werden. Diese Funktion ist eine Bijektion von $\mathcal{O} := M \cap \mathcal{U}$ (eine offene Teilmenge von M) nach der offenen Menge

$$\mathcal{W} := x(\mathcal{O}) = \left\{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; (t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0) \in \mathcal{V}\right\} \subset \mathbb{R}^m.$$

Ihre Komponentenfunktionen $x_1, \dots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ heißen **lokale Koordinaten** auf $\mathcal{O}$, und zusammen bilden sie ein **Koordinatensystem** auf $\mathcal{O}$.[7] Jeder Punkt $p \in \mathcal{O}$ kann jetzt eindeutig durch die Werte seiner m Koordinaten bestimmt werden:

$$M \supset \mathcal{O} \ni p \quad \longleftrightarrow \quad x(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p)) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m.$$

Das Koordinatensystem $x = (x_1, \dots, x_m) : \mathcal{O} \to \mathcal{W}$ macht es möglich, eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ in der Region $\mathcal{O} \subset M$ mit einer Funktion auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ zu identifizieren, nämlich die Funktion

$$f_x := f \circ x^{-1} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

die auch eindeutig durch die Relation

$$f_x(x_1(p), \dots, x_m(p)) = f(p) \quad \text{für} \quad p \in \mathcal{O}$$

bestimmt wird. Wir nennen f_x die **Koordinatendarstellung** von f bzgl. des Koordinatensystems x.

Definition 2.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit und $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ist **von der Klasse C^ℓ**, falls für jedes lokale Koordinatensystem $x : \mathcal{O} \to \mathcal{W}$ auf M, die Koordinatendarstellung $f_x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse C^ℓ ist. Im Fall $\ell = k = \infty$ heißt f auch eine **glatte Funktion** auf M. Wir schreiben

$$C^\ell(M) := \left\{ f : M \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist von der Klasse } C^\ell \right\}.$$

[7] In der Theorie abstrakter Mannigfaltigkeiten wird das Wort *Karte* eigentlich mit der gleichen Bedeutung wie unser Wort *Koordinatensystem* verwendet. Weil wir in dieser Vorlesung nur Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ betrachten, haben wir das Wort *Karte* etwas spezifischer definiert, als in der Differentialgeometrie üblich wäre.

Hier gibt es ein bisschen Diskussionsbedarf, ob diese Definition sinnvoll ist und warum es nicht auch für $\ell > k$ formuliert wurde. Es geht darum, inwiefern die Bedingung $f_x \in C^\ell$ unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems x ist.

Definition 2.2. Wir betrachten zwei lokale Koordinatensysteme

$$M \supset \mathcal{O}_x \xrightarrow{x} \mathcal{W}_x \subset \mathbb{R}^m, \qquad M \supset \mathcal{O}_y \xrightarrow{y} \mathcal{W}_y \subset \mathbb{R}^m$$

auf der m-dimensionalen C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Falls $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset$, dann sind $x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$ und $y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$ zwei nichtleere offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$, und wir nennen die verknüpfte Abbildung

$$\mathbb{R}^m \supset x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \xrightarrow{y \circ x^{-1}} y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \subset \mathbb{R}^m$$

einen **Kartenübergang**.

Proposition 2.3. *Auf einer C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ sind alle Kartenübergänge C^k-Diffeomorphismen.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass die zwei Koordinatensysteme in Definition 2.2 durch Karten $\varphi_x : \mathcal{U}_x \to \mathcal{V}_x$ und $\varphi_y : \mathcal{U}_y \to \mathcal{V}_y$ bestimmt sind, was heißt,

$$\mathcal{O}_x = M \cap \mathcal{U}_x, \ \varphi_x|_{\mathcal{O}_x} = (x, 0) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O}_y = M \cap \mathcal{U}_y, \ \varphi_y|_{\mathcal{O}_y} = (y, 0).$$

Da φ_x und φ_y beide C^k-Diffeomorphismen sind, so ist auch die Verknüpfung

$$\mathbb{R}^n \supset \mathcal{V}_x \supset \varphi_x(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y) \xrightarrow{\varphi_y \circ \varphi_x^{-1}} \varphi_y(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y) \subset \mathcal{V}_y \subset \mathbb{R}^n.$$

Die Einschränkung von diesem Diffeomorphismus auf der Schnittmenge von $\varphi_x(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y)$ mit $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ ist $(y \circ x^{-1}, 0)$, also folgt, dass der Kartenübergang $y \circ x^{-1}$ auch ein C^k-Diffeomorphismus ist. □

Wenn $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer gegebenen offenen Teilmenge $\mathcal{O} \subset M$ zwei Koordinatendarstellungen $f_x : \mathcal{W}_x \to \mathbb{R}$ und $f_y : \mathcal{W}_y \to \mathbb{R}$ zulässt, dann folgt direkt aus der Definition der Koordinatendarstellung in (3) die Relation

$$f_x = f_y \circ (y \circ x^{-1}), \tag{4}$$

wobei $y \circ x^{-1} : \mathcal{W}_x \to \mathcal{W}_y$ nach Proposition 2.3 ein C^k-Diffeomorphismus ist. Da C^k-Funktionen für $\ell \leqslant k$ auch von der Klasse C^ℓ sind und Verknüpfungen von zwei C^ℓ-Funktionen auch von der Klasse C^ℓ sind, haben wir jetzt die folgende Konsequenz: für jedes $\ell \leqslant k$ ist f_x von der Klasse C^ℓ genau dann, wenn f_y von der Klasse C^ℓ ist. Anders gesagt, die Bedingung "$f \in C^\ell$" ist für $\ell \leqslant k$ nicht abhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten. Andererseits sieht das bei $\ell > k$ anders aus: wenn einige Kartenübergänge $k < \infty$ stetige Ableitungen aber nicht mehr haben, dann wird es wegen (4) für die meisten Funktionen f unmöglich sein, dass *alle* ihre Koordinatendarstellungen von der Klasse C^ℓ sind. Aus diesem Grund steht die Einschränkung $\ell \leqslant k$ in Definition 2.1: der Begriff "C^ℓ-Funktion" auf einer C^k-Mannigfaltigkeit ist wirklich nur sinnvoll, wenn $\ell \leqslant k$.

Bemerkung 2.4. Die obigen Bemerkungen zu Definition 2.1 sind der Hauptgrund, warum man in der Differentialgeometrie oft nur *glatte* Mannigfaltigkeiten betrachtet. Diese Einschränkung ist für die meisten Zwecke nicht wesentlich, aber es vereinfacht Vieles, wenn man nicht ständig aufpassen muss, dass man nicht öfter differenziert als die Mannigfaltigkeit erlaubt.

Die Umkehrabbildung von einem Koordinatensystem $x : \mathcal{O} \to \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine **lokale Parametrisierung**

$$\psi := x^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{O} \subset M.$$

Eine Parametrisierung ψ kann immer in der Form $\psi(t_1, \ldots, t_m) = \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$ für eine Karte $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ geschrieben werden, und ist deswegen eine C^k-Funktion nach $\mathbb{R}^n$ mit Bild in M (vgl. Satz 1.18). Sind $\psi_x = x^{-1} : \mathcal{W}_x \to \mathcal{O}_x$ und $\psi_y = y^{-1} : \mathcal{W}_y \to \mathcal{O}_y$ zwei Parametrisierungen mit dem selben Bild $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y \subset M$, dann erfüllen sie die Relation

$$\psi_x = \psi_y \circ (y \circ x^{-1}), \tag{5}$$

d.h. jede ist die Verknüpfung der Anderen mit einem C^k-Diffeomorphismus, nämlich dem Kartenübergang $y \circ x^{-1}$.

Aufgabe 2.5. Beweisen Sie: ist $x = (x_1, \ldots, x_m) : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ ein lokales Koordinatensystem auf einer C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, dann sind die Koordinaten $x_1, \ldots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ selbst Funktionen von der Klasse C^k auf $\mathcal{O} \subset M$.

Aufgabe 2.6. Zeigen Sie: ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse C^ℓ für $\ell \geqslant k$, dann ist $f|_M : M \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^k.

2.2 Koordinatenunabhängige Integration in Dimension 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{O} \subset M$ eine offene Teilmenge mit einer Koordinate $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W}_x \subset \mathbb{R}$, und $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$. Als erster Versuch für eine Definition von $\int_M f$ könnte man einfach die Koordinatendarstellung von f integrieren, d.h. $\int_M f := \int_{\mathcal{W}_x} f_x(t)\, dt$. Hier soll das Integral auf der rechten Seite als gewöhnliches Lebesgue-Integral der Funktion f_x über einem Gebiet in $\mathbb{R}$ betrachtet werden, und dieses Integral existiert auf jeden Fall, denn $f_x = f \circ x^{-1} : \mathcal{W}_x \to \mathbb{R}$ ist stetig und hat kompakten Träger. Aber wir haben das folgende Problem: wenn eine zweite Koordinate $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{y} \mathcal{W}_y \subset \mathbb{R}$ auf der gleichen Teilmenge definiert ist, könnten wir statt f_x die Koordinatendarstellung f_y integrieren, und die Antwort wäre nicht gleich: die zwei Darstellungen sind durch (4) miteinander verwandt, und im Allgemeinen gilt

$$\int_{\mathcal{W}_x} f_x(t)\, dt = \int_{\mathcal{W}_x} f_y \circ (y \circ x^{-1})(t)\, dt \neq \int_{\mathcal{W}_y} f_y(t)\, dt.$$

Man kann hier fast die Substitutionsregel für Integrale in einer Dimension erkennen, aber es fehlt etwas: für eine richtige Substitution bräuchte der Integrand auf der linken Seite noch $\left|\frac{d}{dt}(y \circ x^{-1})(t)\right|$. Dieses Gedankenexperiment zeigt, dass das Integral einer Funktion auf einer 1-Mannigfaltigkeit im Allgemeinen koordinatenabhängig ist, was in diesem Kontext bedeutet, dass es nicht eigentlich definiert werden kann. Man kann doch ein koordinatenunabhängiges Integral auf 1-Mannigfaltigkeiten definieren, aber die Objekte, die man integriert, sind nicht reellwertige Funktionen.

Definition 2.7. Eine **1-Form** λ auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Zuordnung, welche in jedem Punkt $p \in M$ eine lineare Abbildung

$$\lambda_p : T_pM \to \mathbb{R}$$

auszeichnet. Wir nennen λ **stetig**, wenn für jede lokale Parametrisierung $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O} \subset M$ und jedes $j = 1, \ldots, m$, die Funktion

$$\mathcal{W} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \lambda_{\psi(\mathbf{x})}\big(\partial_j \psi(\mathbf{x})\big)$$

stetig ist. Der **Träger** von λ ist der Abschluss der Menge $\{p \in M \mid \lambda_p \neq 0\} \subset M$.

Sei jetzt $M \subset \mathbb{R}^n$ nochmal eine 1-Mannigfaltigkeit, $\mathbb{R} \supset \mathcal{W}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{O} \subset M$ eine lokale Parametrisierung und λ eine stetige 1-Form auf M mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$. Unser zweiter Versuch für die Definition eines Integrals über M lautet:

$$\int_M \lambda := \int_{\mathcal{W}_x} \lambda_{\psi_x(t)}(\psi_x'(t))\, dt. \tag{6}$$

Hier ist nochmal die rechte Seite als gewöhnliches Lebesgue-Integral einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger über einem Gebiet in $\mathbb{R}$ zu verstehen. Ist diese Definition koordinatenunabhängig? Nehmen wir an, es gibt eine zweite Parametrisierung $\mathbb{R} \supset \mathcal{W}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{O} \subset M$ von der selben Teilmenge $\mathcal{O}$. Dann sind ψ_y und ψ_x durch Verknüpfung mit dem Kartenübergang $\tau := y \circ x^{-1} : \mathcal{W}_x \to \mathcal{W}_y$ wie in (5) verwandt, und es gilt,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{W}_x} \lambda_{\psi_x(t)}(\psi_x'(t))\, dt &= \int_{\mathcal{W}_x} \lambda_{\psi_y\circ\tau(t)}\big(\psi_y'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)\big)\, dt = \int_{\mathcal{W}_x} \lambda_{\psi_y\circ\tau(t)}\big(\psi_y' \circ \tau(t)\big)\frac{d\tau}{dt}\, dt \\ &= \pm \int_{\mathcal{W}_y} \lambda_{\psi_y(\tau)}\big(\psi_y'(\tau)\big)\, d\tau,\end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen genau dann stimmt, wenn der Kartenübergang $\tau = y \circ x^{-1}$ positive Ableitung hat. Bis auf dieses Detail mit dem Vorzeichen scheint unsere Definition von $\int_M \lambda$ tatsächlich unabhängig der Wahl der Parametrisierung zu sein. Fazit: das Integral einer Funktion über eine 1-Mannigfaltigkeit ist nicht wohl definiert, aber für das Integral einer 1-Form gibt es Hoffnung!

Wir sagen noch ein Wort zur geometrischen Motivation für den Begriff "1-Form" in Verbindung mit Integration auf 1-Mannigfaltigkeiten. Für jeden Punkt $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ in einer Untermannigfaltigkeit dient sein Tangentialraum T_pM (oder besser gesagt: der affine Raum $p + T_pM \subset \mathbb{R}^n$) als "lineare Approximation" von M in einer Umgebung von p. Im Fall $\dim M = 1$ liefert eine 1-Form λ u.a. ein translationsinvariantes Maß μ_p auf jedem Tangentialraum T_pM: dieses Maß wird eindeutig durch die Bedingung

$$\mu_p(E_X) := |\lambda(X)| \quad \text{für} \quad E_X := \{tX \in T_pM \mid t \in [0,1]\} \subset T_pM$$

bestimmt. Analog werden die über einer m-Mannigfaltigkeit zu integrierenden Objekte ein translationsinvariantes Maß auf jedem m-dimensionalen Tangentialraum T_pM definieren. Wir wissen schon im Prinzip, wie alle solche Maße aussehen: im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ sind sie Vielfache des Lebesgue-Maßes m, das für beliebige Vektoren $X_1, \dots, X_m \in \mathbb{R}^m$ durch

$$m\big(E_{X_1,\dots,X_m}\big) = \big|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_m\end{pmatrix}\big| \tag{7}$$

für das Parallelipiped $E_{X_1,\dots,X_m} := \big\{t_1X_1 + \ldots + t_mX_m \bigm| t_1, \dots, t_m \in [0,1]\big\} \subset T_pM$ charakterisiert werden kann. Die Determinante in dieser Formel kann als antisymmetrische multilineare Funktion ihrer Spalten betrachtet werden, was den Hinweis gibt, dass wir antisymmetrische multilineare Funktionen auf den Tangentialräumen T_pM betrachten sollten.

2.3 Antisymmetrische multilineare Abbildungen

Die obigen Betrachtungen zu translationsinvarianten Maßen auf Tangentialräumen führen uns zu den folgenden Begriffen.

Definition 2.8. Sei V ein reeller Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Eine m-fach multilineare Abbildung $\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \to \mathbb{R}$ heißt **antisymmetrisch**, falls sie die Relation

$$\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_m) = -\omega(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_m)$$

für alle $X_1, \ldots, X_m \in V$ und $1 \leqslant i < j \leqslant m$ erfüllt, d.h. ω ändert sich bei Vertauschung zwei der Variablen nur durch ein Vorzeichen. Der Vektorraum aller antisymmetrischen m-fach multilinearen Abbildungen $V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ wird mit

$$\Lambda^m V^*, \qquad \text{bzw.} \qquad \Lambda^m T_p^* M \text{ im Fall } V = T_p M$$

bezeichnet. Wir erweitern diese Definition auf den Fall $m = 0$ durch $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$ bzw. $\Lambda^0 T_p^* M := \mathbb{R}$.

Wir werden später die Algebra von antisymmetrischen multilinearen Abbildungen ausführlicher besprechen, und u.a. das folgende einfache Resultat beweisen:

Lemma 2.9. *Für einen reellen Vektorraum V von Dimension $m \geqslant 0$ gilt* $\dim \Lambda^m V^* = 1$.

Korollar 2.10. *Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein m-dimensionaler linearer Unterraum, $\omega \in \Lambda^m V^*$ und $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Für $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in V$ definieren wir neue Vektoren $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m \in V$ durch die Matrixrelation*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 & \cdots & \mathbf{v}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{pmatrix} \mathbf{A}.$$

Dann gilt: $\omega(\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m) = \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) \cdot \mathrm{Det}(\mathbf{A})$.

Beweis. Wir wählen einen Isomorphismus $V \to \mathbb{R}^m$ und identifizieren V dadurch mit $\mathbb{R}^m$. Unter dieser Identifikation wird ω ein Element von $\Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$, der Laut Lemma 2.9 ein 1-dimensionaler Vektorraum ist, also können wir jetzt

$$\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) = c\mathrm{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{pmatrix}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ schreiben. Die Relation folgt dann von der Formel $\mathrm{Det}(\mathbf{BA}) = \mathrm{Det}(\mathbf{B}) \cdot \mathrm{Det}(\mathbf{A})$. $\square$

3 Integration von Differentialformen

3.1 Differentialformen

Mit der Notation von §2.3 kann man eine 1-form λ auf einer Mannigfaltigkeit M als Funktion betrachten, deren Wert λ_p in einem beliebigen Punkt $p \in M$ ein Element des Vektorraums $\Lambda^1 T_p^* M$ ist. Letzteres ist nämlich der Raum aller antisymmetrischen 1-fach multilinearen Abbildungen $T_p M \to \mathbb{R}$, was nichts anderes als der Raum aller linearen Abbildungen $T_p M \to \mathbb{R}$ ist. Mit der Idee von translationsinvarianten Maßen auf $T_p M$ im Hintergrund, verallgemeinern wir diesen Begriff jetzt wie folgt.

Definition 3.1. Sei $q \geqslant 0$ eine ganze Zahl und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit. Eine **Differentialform** ω von **Grad** q auf M, oder kurz eine **q-Form**, ist eine Zuordnung, welche in jedem Punkt $p \in M$ eine reellwertige antisymmetrische q-fach multilineare Abbildung

$$\omega_p \in \Lambda^q T_p^* M$$

auszeichnet. Die q-Form ω ist **von der Klasse** C^ℓ für $\ell \leqslant k-1$,[8] wenn für jede lokale Parametrisierung $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O} \subset M$ und alle $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, m\}$, die Funktion

$$\mathcal{W} \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \omega_{\psi(\mathbf{x})}\big(\partial_{j_1}\psi(\mathbf{x}), \dots, \partial_{j_q}\psi(\mathbf{x})\big)$$

von der Klasse C^ℓ ist. Der Raum der q-Formen von der Klasse C^ℓ auf M wird mit

$$\Omega^q_\ell(M) \quad \text{bzw.} \quad \Omega^q(M) := \Omega^q_\infty(M) \text{ im Fall } k = \infty$$

bezeichnet. Der **Träger** einer q-Form ω ist der Abschluss der Menge $\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$.

Bemerkung 3.2. Nach der in Definition 2.8 gegebenen Konvention $\Lambda^0 T_p^* M = \mathbb{R}$ ist eine 0-Form auf einer Mannigfaltigkeit M einfach eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$.

3.2 Integration einer m-Form durch Parametrisierung

Die lokale Definition des Integrals einer 1-Form über einer 1-Mannigfaltigkeit lässt sich jetzt wie folgt verallgemeinern. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von Dimension m, $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{W}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{O} \subset M$ eine lokale Parametrisierung, und $\omega \in \Omega^m_0(M)$ eine stetige m-Form mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$. Als **Integral von** ω **über** M definieren wir nun

$$\int_M \omega := \int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_x(\mathbf{t}), \dots, \partial_m\psi_x(\mathbf{t})\big)\, dt_1 \dots dt_m \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

wobei die rechte Seite ein gewöhnliches Lebesgue-Integral einer stetigen Funktion mit kompaktem Träger über einer offenen Teilmenge $\mathcal{W}_x \subset \mathbb{R}^m$ ist. Wir behaupten: diese Definition ist (bis auf ein kleines Detail) unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Sei also $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{W}_y \xrightarrow{\psi_y} \mathcal{O} \subset M$ eine zweite Parametrisierung der gleichen Teilmenge $\mathcal{O} \subset M$, verwandt mit ψ_x durch $\psi_x = \psi_y \circ \boldsymbol{\tau}$, wobei der Kartenübergang $\boldsymbol{\tau} := y \circ x^{-1} : \mathcal{W}_x \to \mathcal{W}_y$ ein C^k-Diffeomorphismus ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_x(\mathbf{t}), \dots, \partial_m\psi_x(\mathbf{t})\big)\, dt_1 \dots dt_m \\
&\qquad = \int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_y \circ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})}\big(\partial_1(\psi_y \circ \boldsymbol{\tau})(\mathbf{t}), \dots, \partial_m(\psi_y \circ \boldsymbol{\tau})(\mathbf{t})\big)\, dt_1 \dots dt_m \\
&\qquad = \int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_y \circ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_y(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})), \dots, \partial_m\psi_y(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}))\big) \cdot \mathrm{Det} D\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})\, dt_1 \dots dt_m,
\end{aligned}$$

wobei der Übergang von der zweiten zur dritten Zeile durch die Kettenregel und Korollar 2.10 erfolgt. Die Determinante $\mathrm{Det} D\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})$ ist nirgendwo 0, da $\mathbf{t} \mapsto \boldsymbol{\tau}(\mathbf{t})$ ein Diffeomorphismus ist; falls diese Determinante überall positiv ist, dann führt die Transformationsformel jetzt zum Resultat

$$\int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_x(\mathbf{t}), \dots, \partial_m\psi_x(\mathbf{t})\big)\, d^m t = \int_{\mathcal{W}_y} \omega_{\psi_y(\boldsymbol{\tau})}\big(\partial_1\psi_y(\boldsymbol{\tau}), \dots, \partial_m\psi_y(\boldsymbol{\tau})\big)\, d^m \tau,$$

also ändert sich $\int_M \omega$ tatsächlich nicht, wenn wir es durch verschiedene lokale Parametrisierungen berechnen, solange die Kartenübergänge $y \circ x^{-1}$ zwischen verschiedenen Parametrisierungen immer

$$\mathrm{Det} D(y \circ x^{-1}) > 0 \tag{9}$$

erfüllen.

[8] Die Beschränkung $\ell \leqslant k-1$ liegt daran, dass die Definition von $\Omega^q_\ell(M)$ von partiellen Ableitungen lokaler Parametrisierungen abhängt, und auf einer C^k-Mannigfaltigkeit sind diese Ableitungen möglicherweise nicht mehr als $(k-1)$-mal differenzierbar.

Aufgabe 3.3. Zeigen Sie: in der obigen Situation gilt auch (unabhängig von der Bedingung (9))

$$\int_{\mathcal{W}_x} \left|\omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_x(\mathbf{t}),\dots,\partial_m\psi_x(\mathbf{t})\big)\right| \, d^m t = \int_{\mathcal{W}_y} \left|\omega_{\psi_y(\boldsymbol{\tau})}\big(\partial_1\psi_y(\boldsymbol{\tau}),\dots,\partial_m\psi_y(\boldsymbol{\tau})\big)\right| \, d^m \tau.$$

3.3 Orientierungen

Die Bedingung (9) weist auf eine Besonderheit von Integration auf Mannigfaltigkeiten hin, die bei der Integration auf $\mathbb{R}^n$ kein Analogon hat. Das Integral einer m-Form ω über einer m-Mannigfaltigkeit M ist erst dann wohl definiert, wenn man auf M ein bisschen mehr Struktur hat, nämlich eine *Orientierung*.

Definition 3.4. Sei $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$. Die Transformation φ ist **orientierungserhaltend**, falls

$$\operatorname{Det} D\varphi > 0$$

überall gilt, und **orientierungsumkehrend**, falls

$$\operatorname{Det} D\varphi < 0$$

überall gilt.

Wir erläutern diese Unterscheidung durch einige Beispiele. Im Fall $n = 1$ ist φ genau dann orientierungserhaltend, wenn φ eine wachsende Funktion ist; gleichfalls ist φ orientierungsumkehrend, wenn φ eine fallende Funktion ist. Eine *Rotation* $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$, gegeben durch eine Matrix der Form

$$\mathbf{R}_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ist orientierungserhaltend, denn $Df_\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_\theta$ hat Determinante 1. Etwas allgemeiner kann man sagen, jede invertierbare lineare Transformation $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch eine stetige 1-parametrige Familie $\{f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{t\in[0,1]}$ von invertierbaren linearen Transformationen mit der Identitätsabbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verbunden werden kann, ist orientierungserhaltend: das stimmt, weil jede der Transformationen f_t in der Familie durch eine Matrix $\mathbf{A}_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Det}(\mathbf{A}_t) \neq 0$ dargestellt werden kann, und die Einheitsmatrix $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat $\operatorname{Det}(\mathbb{1}) = 1 > 0$. Ein einfaches Beispiel einer orientierungsumkehrenden linearen Transformation auf $\mathbb{R}^2$ ist die Spiegelung gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die Determinante $-1 < 0$ hat. Jede Verknüpfung einer Rotation mit einer Spiegelung ist aus diesem Grund orientierungsumkehrend. Ein Tausch von zwei Koordinaten in $\mathbb{R}^n$,

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

ist auch immer orientierungsumkehrend, und kann sogar auch als Spiegelung bzgl. eines bestimmten $(n-1)$-dimensionalen Unterraums betrachtet werden.

Definition 3.5. Ein **Atlas** auf einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein System von Karten $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ mit der Eigenschaft

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha,$$

d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es unter den Karten φ_α für $\alpha \in I$ mindestens eine Karte um p. (In dieser Definition ist I eine beliebige Menge, mit deren Elementen die einzelnen Karten im System gekennzeichnet werden.)

Jede Karte $\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha$ in einem Atlas bestimmt wie in §2.1 auch ein Koordinatensystem, das wir im Folgenden mit $M \supset \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow{x_\alpha} \mathcal{W}_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ bezeichnen. Die Mengen $\mathcal{O}_\alpha = M \cap \mathcal{U}_\alpha$ sind dann offene Teilmengen von M, und ihre Vereinigung $\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha$ ist M.

Definition 3.6. Ein Atlas $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ auf $M \subset \mathbb{R}^n$ ist **orientiert**, falls die Kartenübergänge $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ für $\alpha, \beta \in I$ alle orientierungserhaltend sind.

Die Vereinigung von zwei Atlanten auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist selbst ein Atlas, aber es kann passieren, dass beide Atlanten orientiert sind und ihre Vereinigung nicht orientiert ist. Man kann eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller orientierten Atlanten definieren, wobei zwei orientierte Atlanten genau dann als äquivalent betrachtet werden, wenn ihre Vereinigung auch orientiert ist.

Definition 3.7. Eine **Orientierung** auf $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten. Eine **orientierte Mannigfaltigkeit** ist eine Mannigfaltigkeit, die mit einer Orientierung versehen ist. Eine Mannigfaltigkeit M ist **orientierbar**, wenn mindestens eine Orientierung auf M existiert. Eine Karte φ auf einer orientierten Mannigfaltigkeit heißt eine **orientierte Karte**, wenn die Vereinigung von φ mit einem orientierten Atlas aus der gegebenen Äquivalenzklasse auch ein orientierter Atlas ist.

Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn sie einen orientierten Atlas zulässt. In einfachen Beispielen wie $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist es nicht schwierig, einen orientierten Atlas explizit zu konstruieren (s. Beispiel 3.8). In allgemeineren Beispielen wie die Fläche $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ im Integralsatz von Stokes (Satz 1.3) werden wir sehen, dass die Existenz einer Orientierung aus allgemeinen Prinzipien garantiert ist. Wir werden nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten in dieser Vorlesung grundsätzlich nicht betrachten, aber es ist wichtig zu wissen, dass es sie auch gibt (s. Beispiel 3.10).

Beispiel 3.8. Wir konstruieren einen orientierten Atlas auf S^2, der aus genau vier Karten besteht. Die ersten zwei Karten $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i$ $(i = 1, 2)$ werden aus den Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) von Aufgabe 11.1 (Übungsblatt 11) gebaut, die durch

$$x = r\cos\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\cos\phi, \quad z = r\sin\phi$$

mit den kartesischen Koordinaten (x, y, z) auf $\mathbb{R}^3$ verwandt sind. In Kugelkoordinaten ist $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Teilmenge $\{r = 1\}$; um die Bedingung $\mathcal{U}_i \cap S^2 = \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ zu erfüllen, ersetzen wir $r \in (0, \infty)$ also mit $\rho := r - 1 \in (-1, \infty)$ und definieren $\varphi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_1 := (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} \mathcal{U}_1, \qquad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)\cos\theta\cos\phi \\ (\rho+1)\sin\theta\cos\phi \\ (\rho+1)\sin\phi \end{pmatrix},$$

wobei $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^3$ als das Komplement der Teilmenge $\{x \geqslant 0,\ y = 0\}$ definiert wird. Das durch φ_1 definierte Koordinatensystem auf $\mathcal{O}_1 := \mathcal{U}_1 \cap S^2$ ist $(\theta, \phi) : \mathcal{O}_1 \to (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$, wobei θ und ϕ ihre gewöhnliche Bedeutung als Kugelkoordinaten haben.

Für die zweite Karte nehmen wir die gleiche Formel für φ_2^{-1}, aber mit Definitionsbereich

$$\mathcal{V}_2 := (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, \infty),$$

und $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^3$ ist dann das Komplement von $\{x \leqslant 0,\ y = 0\}$. Das entsprechende Koordinatensystem auf $\mathcal{O}_2 := \mathcal{U}_2 \cap S^2$ werden wir mit $(\theta', \phi') : \mathcal{O}_2 \to (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ bezeichnen.

Nur zwei Punkte in S^2 sind nicht in $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, nämlich $(0, 0, 1)$ und $(0, 0, -1)$. Wir definieren jetzt zwei weitere Karten, die genau diese zwei Punkte im Zentrum ihrer Definitionsbereiche haben: die Idee in beiden Fällen ist, dass wir die kartesischen Koordinaten (x, y) als Koordinaten auf Teilmengen von S^2 betrachten und z entsprechend als Funktion von (x, y) definieren. Um den "Nordpol" $(0, 0, 1)$ zu erfassen, definieren wir $\varphi_3 : \mathcal{U}_3 \to \mathcal{V}_3$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_3 := B_1^2 \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_3^{-1}} \mathcal{U}_3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)x \\ (\rho+1)y \\ (\rho+1)\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix},$$

wobei $B_1^2 \subset \mathbb{R}^2$ die offene Einheitskugel bezeichnet und $\mathcal{U}_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Das entsprechende Koordinatensystem auf der "nördlichen" Hemisphäre $\mathcal{O}_3 := \mathcal{U}_3 \cap S^2$ ist $(x, y) : \mathcal{O}_3 \to B_1^2$.

Für den Südpol machen wir etwas Ähnliches, aber aus Orientierungsgründen vertauschen wir die Rollen der x- und y-Koordinaten: um Verwirrung zu vermeiden, geben wir beiden neue Namen und definieren $\varphi_4 : \mathcal{U}_4 \to \mathcal{V}_4$ als die Umkehrabbildung von

$$\mathcal{V}_4 := B_1^2 \times (-1, \infty) \xrightarrow{\varphi_4^{-1}} \mathcal{U}_4, \qquad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\rho+1)\eta \\ (\rho+1)\xi \\ -(\rho+1)\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \end{pmatrix},$$

mit $\mathcal{U}_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$. Das entsprechende Koordinatensystem auf der "südlichen" Hemispäre $\mathcal{O}_4 := \mathcal{U}_4 \cap S^2$ ist $(\xi, \eta) : \mathcal{O}_4 \to B_1^2$.

Aufgabe 3.9. Zeigen Sie, dass die vier in Beispiel 3.8 definierten Karten einen orientierten Atlas auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ bilden. Zeigen Sie dabei, dass der Atlas nicht orientiert wäre, hätten wir die Rollen der x- und y-Koordinaten in der Definition der vierten Karte nicht vertauscht.

Beispiel 3.10. Das **Möbiusband** $M \subset \mathbb{R}^3$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, die man wie folgt parametrisieren kann. So wie in Beispiel 1.17 parametrisieren wir einen Kreis in der xy-Ebene durch $\mathbf{v}(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta, 0) \in \mathbb{R}^3$ und schreiben $\mathbf{e}_z := (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Der Vektor $\mathbf{w}(\theta) := \cos(\theta/2)\mathbf{v}(\theta) + \sin(\theta/2)\mathbf{e}_z$ liegt für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ im von $\mathbf{v}(\theta)$ und $\mathbf{e}_z$ aufgespannten Unterraum, aber während $\mathbf{v}(\theta)$ für $\theta \in [0, 2\pi]$ den vollen Kreis herumläuft, rotiert sich $\mathbf{w}(\theta)$ gleichzeitig nur halbwegs. Wir definieren M als das Bild der glatten Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3, \qquad f(\theta, t) := 2\mathbf{v}(\theta) + t\mathbf{w}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta\,[2 + t\cos(\theta/2)] \\ \sin\theta\,[2 + t\cos(\theta/2)] \\ t\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Man kann als Anwendung von Satz 1.18 zeigen, dass M eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Sie haben sicherlich schon mal von M gehört, als Beispiel einer Fläche, die nur eine "Seite" hat. Eine präziserer Formulierung dieser Eigenschaft ist, dass M kein stetiges *Normalenvektorfeld* zulässt, d.h. es gibt keine stetige Funktion $\boldsymbol{\nu} : M \to \mathbb{R}^3$, die die Bedingungen $\|\boldsymbol{\nu}(p)\| = 1$ und $\langle \boldsymbol{\nu}(p), X \rangle = 0$ für alle $p \in M$ und $X \in T_pM$ gleichzeitig erfüllt. Man kann für alle Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\dim M = n - 1$ zeigen, dass die Existenz eines Normalenvektorfelds äquivalent ist zur Orientierbarkeit von M.

3.4 Zerlegung der Eins

Wenn wir nur Karten aus orientierten Atlanten betrachten, dann wird unsere Definition vom Integral $\int_M \omega$ in (8) tatsächlich unabhängig von der Kartenwahl sein, aber diese Definition hat immer noch den Nachteil, dass er nur für eine Differentialform ω mit kompaktem Träger im Definitionsbereich *einer einzigen Karte* sinnvoll ist. Wir erklären jetzt einen einfachen Trick, um diese Beschränkung aufzuheben.

Lemma 3.11. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und $\{\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung davon, d.h. für jedes $\alpha \in I$ ist $\mathcal{U}_\alpha$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, und $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$. Dann existieren eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von K und glatte Funktionen $\rho_\alpha : \mathcal{V} \to [0,1]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\rho_\alpha|_K : K \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger in $\mathcal{U}_\alpha \cap K$ für jedes $\alpha \in I$;*
2. *$\rho_\alpha \equiv 0$ für alle bis auf endlich viele verschiedene $\alpha \in I$;*
3. *$\displaystyle\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \equiv 1$ auf K.*

Bemerkung 3.12. Die Anzahl an Mengen in der offenen Überdeckung $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ darf unendlich oder sogar überabzählbar sein, aber die Summe $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha$ ist wegen der zweiten aufgelisteten Eigenschaft in Lemma 3.11 wohl definiert. Diese Konstruktion heißt eine (der gegebenen Überdeckung untergeordnete) **Zerlegung der Eins**.[9] Das Resultat kann auch für den Fall einer nichtkompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ verallgemeinert werden, aber der Beweis wird schwieriger. Die Existenz einer Zerlegung der Eins ist für viele theoretische Entwicklungen in der Geometrie und Topologie wesentlich, aber die Details der Konstruktion sind dabei fast nie wichtig.

Beweis von Lemma 3.11. Als Vorbemerkung ist die folgende Tatsache wichtig zu wissen: für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x}$ gibt es eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, die kompakten Träger in $\mathcal{U}$ hat und $\psi(\mathbf{x}) > 0$ erfüllt. Eine Konstruktion dafür wurde in der Vorlesung *Analysis II*, Aufgabe 11.A vorgeschlagen: es fängt mit der Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \psi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

an, die glatt ist, kompakten Träger $[-1, 1]$ hat und $\psi(0) > 0$ erfüllt. Es ist jetzt eine einfache Übungsaufgabe, aus diesem Modell glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ zu bauen, die beliebig kleinen Träger aber einen positiven Wert in einem gegebenen Punkt haben.

[9] im Englischen: a **partition of unity** subordinate to the given cover

Jetzt wählen wir für jedes $\mathbf{x} \in K$ ein $\alpha_{\mathbf{x}} \in I$, so dass $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_{\alpha_{\mathbf{x}}}$, und eine glatte Funktion $\psi_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, die kompakten Träger in $\mathcal{U}_{\alpha_{\mathbf{x}}}$ hat und $\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) > 0$ erfüllt. Weil $\psi_{\mathbf{x}}$ stetig ist, gibt es eine Umgebung

$$\mathcal{V}_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{U}_{\alpha_{\mathbf{x}}}$$

von $\mathbf{x}$, auf der $\psi_{\mathbf{x}}$ positiv ist. Die Umgebungen $\{\mathcal{V}_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in K}$ bilden jetzt eine offene Überdeckung von der kompakten Menge K, und haben also eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $K_0 \subset K$, so dass

$$K \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in K_0} \mathcal{V}_{\mathbf{x}}.$$

Für jedes $\alpha \in I$ definieren wir noch eine endliche Teilmenge

$$K_\alpha := \left\{ \mathbf{x} \in K_0 \;\middle|\; \alpha_{\mathbf{x}} = \alpha \right\},$$

und dazu eine glatte Funktion

$$\psi_\alpha := \sum_{\mathbf{x} \in K_\alpha} \psi_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty).$$

Diese Funktion ist positiv auf $\bigcup_{\mathbf{x} \in K_\alpha} \mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ und hat kompakten Träger in $\mathcal{U}_\alpha$. Da K_0 endlich ist, ist die Teilmenge K_α für alle bis auf endlich viele verschiedene $\alpha \in I$ leer, also verschwindet ψ_α auch für alle bis auf endlich viele $\alpha \in I$. Deswegen ist die Summe

$$\psi := \sum_{\alpha \in I} \psi_\alpha = \sum_{\mathbf{x} \in K_0} \psi_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$$

eine überall wohl definierte glatte Funktion, und auf K ist sie positiv, denn jedes $\mathbf{y} \in K$ gehört zu $\mathcal{V}_{\mathbf{x}}$ für ein $\mathbf{x} \in K_0$. Wir wählen eine Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ von K, auf der ψ positiv ist, und definieren für $\alpha \in I$,

$$\rho_\alpha := \frac{\psi_\alpha}{\psi} \quad \text{auf} \quad \mathcal{V}.$$

□

3.5 Definition des Integrals

Wir sind jetzt in der Lage, die allgemeine Definition von $\int_M \omega$ als Satz zu formulieren.

Satz 3.13. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $m \in \mathbb{N}$, und bezeichne mit $\Omega^m_{0,c}(M)$ der Raum aller stetigen m-Formen auf M mit kompakten Trägern. Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung*

$$\Omega^m_{0,c}(M) \to \mathbb{R}, \qquad \omega \mapsto \int_M \omega$$

mit der Eigenschaft, dass $\int_M \omega$ durch

$$\int_M \omega = \int_{\mathcal{W}_x} \omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1 \psi_x(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m \psi_x(\mathbf{t})\big)\, dt_1 \ldots dt_m \in \mathbb{R} \tag{10}$$

gegeben ist, wenn der Träger von ω im Bild $\mathcal{O}_x \subset M$ einer durch eine orientierte Karte bestimmten lokalen Parametrisierung $\psi_x : \mathcal{W}_x \to \mathcal{O}_x$ enthalten ist.

Beweis. Wenn nur orientierte Karten betrachtet werden, dann erfüllen alle Kartenübergänge $\mathrm{Det}D(y \circ x^{-1}) > 0$, und deswegen ist die Definition (10) unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Wenn der Träger von $\omega \in \Omega^m_{0,c}(M)$ nicht im Bild einer Parametrisierung enthalten ist, machen wir Folgendes. Per Annahme ist der Träger $K \subset M$ von ω kompakt. Sei $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein orientierter Atlas für M, also bilden die offenen Mengen $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Überdeckung von K. Sei $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von K und $\{\rho_\alpha : \mathcal{V} \to [0,1]\}_{\alpha \in I}$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins. Da die Funktionen ρ_α glatt sind, sind ihre Einschränkungen auf $M \cap \mathcal{V}$ von der Klasse C^k, und für jedes $\alpha \in I$ definiert

$$\omega_\alpha := \rho_\alpha \omega, \qquad (\omega_\alpha)_p := \begin{cases} \rho_\alpha(p)\omega_p & \text{für } p \in K, \\ 0 & \text{für } p \in M \backslash K \end{cases}$$

eine stetige m-Form auf M mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}_\alpha := M \cap \mathcal{U}_\alpha$. Des Weiteren gilt

$$\sum_{\alpha \in I} \omega_\alpha = \omega,$$

wobei die Summe wohl definiert ist, weil ω_α für alle bis auf endlich viele $\alpha \in I$ verschwindet. Das Integral $\int_M \omega_\alpha$ ist dann für jedes $\alpha \in I$ durch (10) gegeben, und die Definition von $\int_M \omega$ wird eindeutig durch Linearität als

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in I} \int_M \omega_\alpha$$

bestimmt. Man kann als leichte Übungsaufgabe zeigen, dass diese Definition die zwei gewünschten Eigenschaften erfüllt. □

Bemerkung 3.14. Die im obigen Beweis gegebene Formel für $\int_M \omega$ fordert die Wahl einer Zerlegung der Eins, aber weil keine Zerlegung der Eins in der Aussage des Satzes erwähnt wurde, hängt $\int_M \omega$ nicht eigentlich von dieser Wahl ab.

Die folgende Variante braucht keine Orientierung auf M, aber dafür kann das Integral nur nichtnegative Werte haben.

Satz 3.15. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Dimension $m \in \mathbb{N}$. Das Integral*

$$\int_M |\omega| \in [0, \infty)$$

für stetige m-Formen ω mit kompakten Trägern kann eindeutig so definiert werden, dass es für zwei m-Formen ω, ω' immer

$$\int_M \big(|\omega| + |\omega'|\big) = \int_M |\omega| + \int_M |\omega'|$$

erfüllt, und für ω mit Träger enthalten im Bild $\mathcal{O}_x \subset M$ einer lokalen Parametrisierung $\psi_x : \mathcal{W}_x \to \mathcal{O}_x$ durch

$$\int_M |\omega| = \int_{\mathcal{W}_x} \big|\omega_{\psi_x(\mathbf{t})}\big(\partial_1 \psi_x(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m \psi_x(\mathbf{t})\big)\big| \, dt_1 \ldots dt_m \in \mathbb{R} \tag{11}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3.16. Beweisen Sie Satz 3.15 mit Hilfe von Aufgabe 3.3.

Aufgabe 3.17. Eine Orientierung auf einer m-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ kann immer wie folgt umgekehrt werden. Sei $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die orientierungsumkehrende Spiegelung

$$\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) := (-x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Für einen orientierten Atlas $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ auf M definieren wir nun einen neuen Atlas aus den Karten

$$\varphi'_\alpha := \sigma \circ \varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}'_\alpha := \sigma(\mathcal{V}_\alpha),$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{\varphi'_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}'_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tatsächlich ein orientierter Atlas ist, aber zu einer anderen Äquivalenzklasse als $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ gehört.

(b) Für einen gegebenen orientierten Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit $-M$ die orientierte Mannigfaltigkeit, die entsteht, wenn man einen orientierten Atlas wie oben modifiziert. Zeigen Sie:

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

In der Praxis kommt es eher selten vor, dass man zum Berechnen eines Integrals eine Zerlegung der Eins explizit wählen muss, und manchmal reicht es sogar, nur eine eizige Karte zu berücksichtigen. Dies lässt sich mit Hilfe des folgenden Satzes umsetzen.

Satz 3.18. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale kompakte orientierte Untermannigfaltigkeit mit einem endlichen orientierten Atlas $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_i\}_{i=0}^N$ und entsprechenden lokalen Koordinatensystemen $M \supset \mathcal{O}_i \xrightarrow{x_i} \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R}^m$ und Parametrisierungen $\mathbb{R}^m \supset \mathcal{W}_i \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{O}_i \subset M$, die die folgende Bedingung erfüllen: für die Teilmenge*

$$E := M \backslash \mathcal{O}_0$$

ist $x_i(E \cap \mathcal{O}_i) \subset \mathcal{W}_i \subset \mathbb{R}^m$ für jedes $i = 1, \dots, N$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^m$. Dann ist die stetige Funktion

$$\mathcal{W}_0 \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{t} \mapsto \omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \dots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big)$$

Lebesgue-integrierbar, und es gilt,

$$\int_M \omega = \int_{\mathcal{W}_0} \omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \dots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big)\, dt_1 \dots dt_m.$$

Beweis. Da $m\big(x_i(E \cap \mathcal{O}_i)\big) = 0$ für $i = 1, \dots, n$ hat $x_i(E \cap \mathcal{O}_i)$ offene Umgebungen in $\mathcal{W}_i \subset \mathbb{R}^m$ mit beliebig kleinem Lebesgue-Maß (s. [Sal16, Theorem 2.13]). Wir wählen eine Folge solcher Umgebungen $\mathcal{W}_i^j \subset W_i$ mit endlichem Maß für $j \in \mathbb{N}$, so dass

$$\bigcap_{j=1}^\infty \mathcal{W}_i^j = x_i(E \cap \mathcal{O}_i),$$

was impliziert, $\lim_{j\to\infty} m(\mathcal{W}_i^j) = 0$. Sei $\mathcal{O}_i^j := \psi_i(\mathcal{W}_i^j) \subset M$; dann bildet $\{\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1^j, \dots, \mathcal{O}_N^j\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von M, so dass $\bigcap_{j=1}^\infty \mathcal{O}_i^j = E \cap \mathcal{O}_i$ für $i = 1, \dots, N$, also folgt,

$$\text{für } \mathcal{O}_0^j := M \backslash \bigcup_{i=1}^N \mathcal{O}_i^j \subset \mathcal{O}_0 \quad \text{gilt} \quad \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{O}_0^j = \mathcal{O}_0. \tag{12}$$

Die Überdeckung $\{\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1^j, \ldots, \mathcal{O}_N^j\}$ kann auch als Schnittmengen von in $\mathbb{R}^n$ offenen Mengen mit M realisiert werden: sei $\mathcal{V}_i^j \subset \mathcal{V}_i \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $\mathcal{V}_i^j \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \mathcal{W}_i^j \times \{0\}$, und definiere $\mathcal{U}_i^j := \varphi_i^{-1}(\mathcal{V}_i^j)$. Dann gilt $\mathcal{O}_i^j = M \cap \mathcal{U}_i^j$, also bildet $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1^j, \ldots, \mathcal{U}_N^j\}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung von M durch in $\mathbb{R}^n$ offene Mengen.

Sei jetzt $\{\rho_i^j\}_{i=0}^N$ eine der Überdeckung $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1^j, \ldots, \mathcal{U}_N^j\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Die Einschränkung von ρ_i^j auf M hat kompakten Träger in $\mathcal{O}_i^j$, also gilt

$$\rho_0^j \equiv 1 \quad \text{auf} \quad \mathcal{O}_0^j.$$

Laut Satz 3.15 gilt jetzt

$$\begin{aligned}\int_M |\omega| &= \sum_{i=0}^N \int_{\mathcal{W}_i} \rho_i^j\big(\psi_i(\mathbf{t})\big) \cdot \big|\omega_{\psi_i(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_i(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_i(\mathbf{t})\big)\big| \, dt_1 \ldots dt_m \\ &\geqslant \int_{x_0(\mathcal{O}_0^j)} \big|\omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big)\big| \, dt_1 \ldots dt_m\end{aligned}$$

für alle j, und wegen (12) folgt

$$\int_{\mathcal{W}_0} \big|\omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big)\big| \, dt_1 \ldots dt_m \leqslant \int_M |\omega| < \infty. \tag{13}$$

Jetzt berechnen wir mittels der selben Zerlegung der Eins das Integral von ω:

$$\int_M \omega = \sum_{i=0}^N \int_{\mathcal{W}_i} \rho_i^j\big(\psi_i(\mathbf{t})\big) \cdot \omega_{\psi_i(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_i(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_i(\mathbf{t})\big) \, dt_1 \ldots dt_m.$$

Für $i = 1, \ldots, N$ ist der Träger des Integrands in $\mathcal{W}_i^j$ enthalten, und da $\lim_{j\to\infty} m(\mathcal{W}_i^j) = 0$, verschwinden diese Integrale im Limes $j \to \infty$, also folgt

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathcal{W}_0} \rho_0^j\big(\psi_0(\mathbf{t})\big) \cdot \omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big) \, dt_1 \ldots dt_m \\ &= \int_{\mathcal{W}_0} \omega_{\psi_0(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi_0(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi_0(\mathbf{t})\big) \, dt_1 \ldots dt_m,\end{aligned}$$

wobei der Übergang zur letzten Zeile erfolgt wegen (13) und des Lebesgueschen Konvergenzsatzes, da $\rho_0^j = 1 - \sum_{i=1}^N \rho_i^j$ auf $\mathcal{O}_0$ punktweise gegen 1 konvergiert. □

Bemerkung 3.19. Die Voraussetzungen in Satz 3.13 sind etwas strenger als unbedingt nötig wäre. Das Integral $\int_M \omega$ kann manchmal auch definiert werden, wenn ω nicht stetig ist und der Träger von ω nicht kompakt ist, und man kann auch so etwas wie $\int_E \omega$ für eine messbare Teilmenge $E \subset M$ definieren, die keine Mannigfaltigkeit ist. Wir werden hier nicht genau formulieren, was *Messbarkeit* für eine Teilmenge einer Mannigfaltigkeit M heißt, oder wann eine (möglicherweise unstetige) Differentialform auf M ohne kompakten Träger als *integrierbar* zu verstehen ist, aber man braucht keine wesentlich neuen Ideen, um diese Begriffe im Kontext von Mannigfaltigkeiten zu definieren. In diesem Kapitel der Vorlesung sind die Schwerpunkte Andere, also erlauben wir strengere Voraussetzungen als nötig, um maßtheoretische Komplikationen zu vermeiden, damit wir uns auf die neuen geometrischen Ideen konzentrieren können.

4 Algebra der Differentialformen

Um mit Differentialformen besser umgehen zu können, brauchen wir jetzt ein paar grundlegenden Begriffe aus der multilinearen Algebra.

4.1 Das äußere Produkt

Sei V ein m-dimensionaler reeller Vektorraum. Der in §2.3 eingeführte Vektorraum $\Lambda^q V^*$ ist ein Unterraum von

$$\otimes^q V^* := \left\{ T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \to \mathbb{R} \;\middle|\; T \text{ multilinear} \right\}.$$

Es gibt eine natürliche lineare Projektion $\mathrm{Alt} : \otimes^q V^* \to \Lambda^q V^*$ gegeben durch

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{|\sigma|} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}),$$

wobei die verschiedenen Symbole die folgenden Bedeutungen haben. Wir bezeichnen mit S_q die **symmetrische Gruppe über q Elementen**, d.h. die Gruppe aller Bijektionen $\sigma : \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, q\}$, auch **Permutationen** genannt. Eine Permutation $\sigma \in S_q$ kann immer als Verknüpfung endlich vieler Vertauschungen

$$(1, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, q) \mapsto (1, \ldots, j, \ldots, i, \ldots, q)$$

geschrieben werden, und man nennt σ **gerade** bzw. **ungerade**, wenn gerade bzw. ungerade viele Vertauschungen in einer solchen Verknüpfung erscheinen. Dass dieser Begriff wohl definiert ist, kann aus der folgenden alternativen Charakterisierung hergeleitet werden: sei $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{GL}(q, \mathbb{R})$ die Matrix der linearen Abbildung $\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, die durch

$$\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{\sigma(i)}$$

für die Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q \in \mathbb{R}^q$ bestimmt wird. Die Determinante dieser Matrix ist immer ± 1, und zwar gilt

$$\mathrm{Det}(\boldsymbol{\sigma}) = (-1)^{|\sigma|} \in \{1, -1\},$$

wobei

$$|\sigma| := \begin{cases} 0 & \text{wenn } \sigma \text{ gerade ist,} \\ 1 & \text{wenn } \sigma \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Ein Element $\omega \in \otimes^q V^*$ gehört zu $\Lambda^q V^*$ genau dann, wenn es die Relation

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = (-1)^{|\sigma|} \omega(v_1, \ldots, v_q)$$

für alle $\sigma \in S_q$ und $v_1, \ldots, v_q \in V$ erfüllt. Da S_q genau $q!$ Elemente hat, ist jetzt leicht nachzuprüfen, dass $\mathrm{Alt}(T) \in \Lambda^q V^*$ für alle $T \in \otimes^q V^*$ und $\mathrm{Alt}(\omega) = \omega$ für alle $\omega \in \Lambda^q V^*$.

Für $S \in \otimes^k V^*$ und $T \in \otimes^\ell V^*$ definieren wir das **Tensorprodukt**

$$S \otimes T \in \otimes^{k+\ell} V^*, \qquad (S \otimes T)(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell) := S(v_1, \ldots, v_k) T(w_1, \ldots, w_\ell).$$

In der Regel ist $S \otimes T$ nicht antisymmetrisch, aber ein antisymmetrisches Produkt von $\lambda \in \Lambda^k V^*$ und $\omega \in \Lambda^\ell V^*$ kann jetzt durch

$$\lambda \wedge \omega := \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \operatorname{Alt}(\lambda \otimes \omega) \in \Lambda^{k+\ell} V^*$$

definiert werden. Dies ist das **äußere Produkt** (auch **Dachprodukt** oder **Wedge-Produkt**). Die folgende algebraische Aufgabe ist kombinatorisch etwas mühsam, aber nicht fundamental schwierig.

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass das Dachprodukt $\wedge$ die folgenden Eigenschaften hat:

1. $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$ und $(\alpha + \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge \gamma + \beta \wedge \gamma$ *(Distributivität)*.
2. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ *(Assoziativität)*.
   Insbesondere sind q-fache Produkte $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q$ auch für $q \geqslant 3$ ohne Klammern wohl definiert.
3. Für $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^\ell V^*$ gilt $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$ *(graduierte Kommutativität)*.
   Insbesondere gilt $\lambda \wedge \lambda = 0$ für alle $\lambda \in \Lambda^q V^*$ mit q ungerade.
4. Für $c \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und $\lambda \in \Lambda^q V^*$ gilt $c \wedge \lambda = c\lambda$.
5. Für $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \Lambda^1 V^*$ gilt

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q = \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{|\sigma|} \lambda_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \lambda_{\sigma(q)}. \tag{14}$$

Der Spezialfall $q = 2$ von (14) ist tatsächlich zum Rechnen geeignet: für $\alpha, \beta \in \Lambda^1 V^*$ und $v, w \in V$ gilt

$$(\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \beta(v)\alpha(w). \tag{15}$$

Das Dachprodukt wird punktweise auch für Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert, d.h. für $\lambda \in \Omega^r_\ell(M)$ und $\omega \in \Omega^s_\ell(M)$ wird $\lambda \wedge \omega \in \Omega^{r+s}_\ell(M)$ durch

$$(\lambda \wedge \omega)_p := \lambda_p \wedge \omega_p \in \Lambda^{r+s} T_p^* M$$

definiert. Insbesondere folgt aus Aufgabe 4.1(4) für $f \in \Omega^0_\ell(M)$ und $\omega \in \Omega^q_\ell(M)$,

$$f \wedge \omega = \omega \wedge f = f\omega,$$

wobei das Produkt einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit einer Differentialform $\omega \in \Omega^q_\ell(M)$ immer als Differentialform $f\omega$ mit

$$(f\omega)_p := f(p)\omega_p \in \Lambda^q T_p^* M$$

zu verstehen ist.

4.2 Eine Basis von $\Lambda^q V^*$

Sei $e_1, \ldots, e_m \in V$ eine Basis von V. Die **Dualbasis** davon besteht aus den eindeutigen Elementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in V^* = \Lambda^1 V^*$, die die Relation

$$\lambda_i(e_i) = 1 \text{ für alle } i \qquad \text{und} \qquad \lambda_i(e_j) = 0 \text{ wenn } i \neq j$$

erfüllen. Aus dieser Basis von V^* kann man Elemente von $\Lambda^q V^*$ in der Form

$$\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_q} \in \Lambda^q V^* \tag{16}$$

für $i_1, \ldots, i_q \in \{1, \ldots, m\}$ bauen. Die graduierte kommutativität von $\wedge$ impliziert, dass dieses Produkt verschwindet, wenn all die $i_1, \ldots, i_q$ nicht verschieden sind, und außerdem sind zwei solche Produkte bis auf ein Vorzeichen gleich, wenn sie durch Permutation der $i_1, \ldots, i_q$ miteinander verwandt sind; wir werden also nichts verlieren, wenn wir in (16) immer $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$ annehmen.

Proposition 4.2. *Für die gegebene Basis $e_1, \ldots, e_m \in V$ und Dualbasis $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in V^*$ kann jedes $\omega \in \Lambda^q V^*$ eindeutig in der Form*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q} \lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_q}$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten $\omega_{i_1 \ldots i_q} \in \mathbb{R}$ durch

$$\omega_{i_1 \ldots i_q} = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$$

gegeben sind.

Beweis. Zwei q-fach multilineare Abbildungen $S, T : V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ sind genau dann identisch, wenn $S(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}) = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$ für alle $i_1, \ldots, i_q \in \{1, \ldots, m\}$ gilt. (Wenn Sie das nicht sofort glauben, sollten Sie eine kurze Pause machen und sich davon überzeugen; es folgt direkt von Multilinearität.) Wenn beide auch antisymmetrisch sind, dann werden diese Werte verschwinden in Fällen, wo die $i_1, \ldots, i_q$ nicht alle verschieden sind, und wenn sie verschieden sind, können sie o.B.d.A. permutiert werden, so dass $i_1 < \ldots < i_q$. Es reicht also nachzuprüfen, dass beide Seiten der Formel $\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} \omega_{i_1 \ldots i_q} \lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_q}$ gleiche Werte haben, wenn sie auf beliebige Tupeln $e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}$ mit $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant m$ ausgewertet werden. Das folgt von der Relation (14), die uns in dieser Situation sagt,

$$\begin{aligned}
(\lambda_{i_1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_q})(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) &= \sum_{\sigma \in S_q} (-1)^{|\sigma|} \lambda_{\sigma(i_1)}(e_{j_1}) \ldots \lambda_{\sigma(i_q)}(e_{j_q}) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{falls } i_k = j_k \text{ für alle } k = 1, \ldots, q, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Korollar 4.3. *Für* $\dim V = m$ *und* $0 \leqslant q \leqslant m$ *gilt* $\dim \Lambda^q V^* = \binom{m}{q} = \frac{m!}{q!(m-q)!}$, *und jede Basis $v_1, \ldots, v_m$ von V bestimmt eine Basis von $\Lambda^q V^*$, die aus allen Produkten* (16) *mit $i_1 < \ldots < i_q$ besteht. Für $q > m$ ist $\Lambda^q V^*$ trivial.* □

Der wichtigste Fall $\dim \Lambda^m V^* = \binom{m}{m} = 1$ kam schon (ohne Beweis) als Lemma 2.9 vor und war eine wesentliche Zutat (mittels Korollar 2.10) im Beweis der Koordinatenunabhängigkeit der lokalen Formel für $\int_M \omega$.

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie: für $q \leqslant m = \dim V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \Lambda^1 V^* = V^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_q = 0$.

4.3 Das Differential einer Funktion als 1-Form

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse C^ℓ, mit $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Diese Funktion bestimmt eine 1-Form $df \in \Omega^1_{\ell-1}(M)$, ihre sogenannte **Differential**. Die kürzeste Definition davon basiert auf die Idee der Kettenregel: für $p \in M$ und $X \in T_pM$ wählen wir einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit Bild in M und $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$, dann definieren wir $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ durch[10]

$$(df)_p(X) := (f \circ \gamma)'(0).$$

Dies ist aus dem folgenden Grund wohl definiert. Sei $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Karte um p und sei $f_x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ die dadurch bestimmte Koordinatendarstellung von f (siehe §2.1), die durch $f_x(\mathbf{t}) = f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{t}, 0)$ für $(\mathbf{t}, 0) \in \mathcal{W} \times \{0\} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ gegeben ist. Für $\epsilon > 0$ hinreichend klein ist das Bild von $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ in $M \cap \mathcal{U}$ enthalten, und $\varphi \circ \gamma$ hat dann die Form

$$\varphi \circ \gamma(t) = (\beta(t), 0) \in \mathcal{W} \times \{0\} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$$

für eine C^1-Funktion $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathcal{W}$, deren Ableitung in $t = 0$ linear von $\gamma'(0) = X$ abhängt. Dann gilt, $f(\gamma(t)) = f_x(\beta(t))$, und die Ableitung davon in $t = 0$ hängt auch linear von X und sonst nicht von der Wahl von γ ab.

Aufgabe 4.5. Beweisen Sie die folgende *Leibnizregel* für das Differential: für zwei C^1-Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ gilt

$$d(fg) = f\,dg + g\,df.$$

4.4 Die Koordinatendarstellung einer Differentialform

Für einen Punkt $p \in \mathcal{O} \subset M \subset \mathbb{R}^n$ im Definitionsbereich eines Koordinatensystems $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ betrachten wir jetzt die einzelnen Koordinaten $x_1, \ldots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, die als Komponentenfunktionen von $x : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ definiert sind. Diese sind reellwertige Funktionen von der Klasse C^k, sie haben also Differentiale,

$$dx_1, \ldots, dx_m \in \Omega^1_{k-1}(\mathcal{O}),$$

wobei die offene Teilmenge $\mathcal{O} \subset M$ selbst als m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird; man kann hier nicht annehmen, dass die 1-Formen dx_i überall auf M wohl definiert sind, denn sie hängen von den lokalen Koordinaten ab. Dazu gibt es die sogenannten **Koordinatenvektorfelder** $e_1, \ldots, e_m$ auf $\mathcal{O}$, die wie folgt definiert sind:[11] für jedes $p \in \mathcal{O}$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$ ist $e_i(p)$ ein Tangentialvektor in T_pM, definiert als die entsprechende partielle Ableitung der von x bestimmten Parametrisierung $\psi := x^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{O}$, d.h.

$$e_i(p) := \partial_i \psi(x(p)).$$

Dass dies in T_pM liegt, folgt davon, dass $\partial_i \psi(x(p))$ auch die Ableitung in $t = 0$ vom Weg $\gamma(t) := \psi(x(p) + t\mathbf{e}_i) \in M$, wobei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^m$ bezeichnet.

[10] Man sieht oft auch die Notation d_pf anstelle von $(df)_p$.

[11] In der Literatur über Differentialgeometrie und z.B. in [AF10] werden die Vektorfelder e_i gern mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezeichnet. Diese Notation wird durch die nicht ganz triviale Tatsache motiviert, dass es eine kanonische Bijektion zwischen dem Raum von Vektorfeldern und dem Raum von Differentialoperatoren erster Ordnung auf Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ gibt, wobei e_i mit der partiellen Ableitung nach der Koordinate x_i identifiziert wird. Diese Korrespondenz ist in der Differentialgeometrie wichtig, aber eine genauere Erklärung würde an dieser Stelle zu viel Zeit in Anspruch nehmen, deswegen verwenden wir die Notation hier lieber nicht.

Lemma 4.6. *Für jeden Punkt $p \in \mathcal{O}$ ist $e_1(p), \ldots, e_m(p)$ eine Basis von T_pM, und ihre Dualbasis ist $(dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p \in \Lambda^1 T_p^* M$.*

Beweis. Die Vektoren $e_1(p), \ldots, e_m(p)$ sind die Bilder der Standardbasis $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \in \mathbb{R}^m$ durch die lineare Abbildung $D\psi(x(p)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, die injektiv ist und Bild T_pM hat, also ist $e_1(p), \ldots, e_m(p)$ auch eine Basis von T_pM. Man muss dann zeigen, dass für $1 \leqslant i, j \leqslant m$,

$$(dx_i)_p\big(e_j(p)\big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn man $e_j(p)$ als Ableitung in $t = 0$ vom $\gamma(t) = \psi(x(p) + t\mathbf{e}_j)$ präsentiert, dann folgt dies sofort. □

Mit dieser Basis wenden wir jetzt Proposition 4.2 an und bekommen eine lokale **Koordinatendarstellung** für eine beliebige Differentialform:

Korollar 4.7. *Jede q-Form ω von der Klasse C^ℓ auf M mit $\ell \leqslant k - 1$ kann im Definitionsbereich des Koordinatensystems $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ in der Form*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} f_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

für eindeutige C^ℓ-Funktionen $f_{i_1 \ldots i_q} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ geschrieben werden. Diese Funktionen sind durch

$$f_{i_1 \ldots i_q}(p) = \omega_p\big(e_{i_1}(p), \ldots, e_{i_q}(p)\big)$$

gegeben. □

Beispiel 4.8. Für eine C^1-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ und ein Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ wird die **partielle Ableitung** von f nach x_i in einem Punkt $p \in \mathcal{O}$ als die Richtungsableitung von f in Richtung $e_i(p)$ definiert:

$$\partial_i f(p) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (df)_p(e_i(p)).$$

Dies ist genau die entsprechende partielle Ableitung der Koordinatendarstellung $f_x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x(p)$. Auf $\mathcal{O}$ impliziert Korollar 4.7 also die Relation

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Sie werden jetzt etwas Interessantes bemerken, wenn Sie Korollar 4.7 mit unserer Koordinatenformel in §3 für das lokale Integral einer m-Form vergleichen. Eine m-Form ω ist im Koordinatenbereich $\mathcal{O} \subset M$ durch $\omega = f \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ für eine eindeutig bestimmte Funktion $f := f_{1\ldots m} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ gegeben. Laut Korollar 4.7 kann f bzgl. der Parametrisierung $\psi := x^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{O}$ durch

$$f(\psi(\mathbf{t})) = \omega_{\psi(\mathbf{t})}\big(\partial_1\psi(\mathbf{t}), \ldots, \partial_m\psi(\mathbf{t})\big) \qquad \text{für} \qquad \mathbf{t} \in \mathcal{W}$$

bestimmt werden; ihre Koordinatendarstellung $f_x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ ist also genau die Funktion, die in der lokalen Definition von $\int_M \omega$ integriert werden muss:

Korollar 4.9. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ ein lokales Koordinatensystem, das von einer orientierten Karte bestimmt wird. Für eine stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $\mathcal{O}$ betrachten wir $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ als m-Form auf M, die außerhalb von $\mathcal{O}$ verschwindet, und bezeichnen mit $f_x : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ die Koordinatendarstellung von f bzgl. x. Dann gilt:*

$$\int_M f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m = \int_{\mathcal{W}} f_x(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_m.$$

□

Nebenbei bemerkt, wir haben jetzt eine sinnvolle Interpretation für Symbole wie "$dx\, dy$" in Lebesgue-Integralen wie $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy$ gefunden: wenn die Koordinaten x und y als reellwertige Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ betrachtet werden, dann sollte "$dx\, dy$" eigentlich als die 2-Form $dx \wedge dy$ verstanden werden, wir haben nur das Symbol "$\wedge$" in der Notation weggelassen. Der einzige Makel bei dieser Interpretation ist, dass wir die Reihenfolge von dx und dy jetzt beachten müssen, denn $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$. Diese Änderung ist aber auch sinnvoll, wenn man über Orientierungen nachdenkt. Als Mannigfaltigkeit hat $\mathbb{R}^2$ eine kanonische Orientierung, mit der die Identitätsabbildung $\varphi := \mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als orientierte Karte betrachtet wird. In Aufgabe 3.17 haben wir gesehen, dass die Orientierung einer Mannigfaltigkeit M immer umgekehrt werden kann, und für das resultierende orientierte Mannigfaltigkeit "$-M$" gilt $\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$. Es gilt also,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dx \wedge dy = \int_{-\mathbb{R}^2} f\, dy \wedge dx,$$

was richtig scheint, wenn man bedenkt, dass $(x,y) \mapsto (y,x)$ ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist, und kann also auch als orientierungs*erhaltender* Diffeomorphismus $\mathbb{R}^2 \to (-\mathbb{R}^2)$ betrachtet werden!

Aufgabe 4.10. Wir betrachten die 2-Mannigfaltigkeit $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ oder } y \neq 0\}$ mit kartesischen Koordinaten $x, y : M \to \mathbb{R}$ und Polarkoordinaten $r, \theta : M \to \mathbb{R}$, die durch $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ miteinander verwandt sind. (Das Bild von $\theta : M \to \mathbb{R}$ ist ein offenes Intervall mit Länge 2π; genau welches Intervall ist für diese Aufgabe egal.) Beweisen Sie die folgende Relation zwischen 2-Formen auf M:

$$dx \wedge dy = r\, dr \wedge d\theta.$$

Bemerkung 4.11. Mit Berechnungen wie in Aufgabe 4.10 kann man die Transformationsformel umgehen und trotzdem Integrale bzgl. verschiedener Koordinatensysteme berechnen. Die Transformationsformel liegt natürlich trotzdem im Hintergrund, denn sie ist der Hauptgrund, warum das Integral einer Differentialform von keiner Koordinatenwahl abhängt.

5 Die äußere Ableitung

5.1 Existenz und Eindeutigkeit

Wir haben in §4.3 gesehen, dass das Differential einer Funktion eine 1-Form definiert. Die **äußere Ableitung** $d\omega$ einer q-Form ω ist ebenfalls eine $(q+1)$-Form, die am besten durch eine Verallgemeinerung der Leibnizregel in Aufgabe 4.5 charakterisiert werden kann.

Satz 5.1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit mit $k \geqslant 2$. Für $q \geqslant 0$ und $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$ gibt es eindeutige lineare Abbildungen*

$$d : \Omega^q_\ell(M) \to \Omega^{q+1}_{\ell-1}(M),$$

so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *Für $f \in \Omega^0_\ell(M) = C^\ell(M)$ ist $df \in \Omega^1_{\ell-1}(M)$ das Differential von f.*
2. *Für alle $\alpha \in \Omega^r_\ell(M)$ und $\beta \in \Omega^s_\ell(M)$ gilt*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta.$$

3. *Für alle $f \in C^2(M)$ gilt $d(df) = 0$.*

Des Weiteren hängt $(d\omega)_p \in \Lambda^{q+1} T^*_p M$ für jeden Punkt $p \in M$ nur in einer beliebig kleinen Umgebung um p von ω ab, und im Fall $k \geqslant 3$ gilt auch[12]

$$d(d\omega) = 0 \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega^q_2(M).$$

Bemerkung 5.2. Die Produktregel in der zweiten Bedingung wird oft als *graduierte Leibnizregel* bezeichnet. Falls Sie das Vorzeichen in dieser Formel beim ersten Blick als störend empfinden, wäre jetzt vielleicht eine gute Zeit, sich mit dem folgenden allgemeinen Prinzip von äußerer Algebra anzufreunden: jedes Objekt ist entweder "gerade" oder "ungerade", und wenn die Reihenfolge von zwei ungeraden Objekten vertauscht wird, wechselt immer ein Vorzeichen. Wir haben das beim Dachprodukt schon gesehen: für zwei Differentialformen α und β gilt $\alpha \wedge \beta = \pm \beta \wedge \alpha$, wobei das Vorzeichen genau dann Minus ist, wenn beide Formen ungeraden Grad haben. Die Unterscheidung zwischen gerade und ungerade gilt auch dem Operator $d : \Omega^q(M) \to \Omega^{q+1}(M)$, der als Objekt mit Grad 1 (daher ungerade) betrachtet wird, weil er den Grad einer Differentialform um 1 erhöht. Das Vorzeichen in der Leibnizregel kommt also davon, dass die Reihenfolge von d und α vertauscht wird. Es ist leicht zu sehen, dass die Formel ohne ein solches Vorzeichen nicht immer richtig sein könnte: z.B. im Fall $\alpha \in \Omega^1(M)$ und $\beta \in \Omega^2(M)$ gilt $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$ und $d\alpha \wedge \beta = \beta \wedge d\alpha$ aber $\alpha \wedge d\beta = -d\beta \wedge \alpha$, also können $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\beta$ und $d(\beta \wedge \alpha) = d\beta \wedge \alpha + \beta \wedge d\alpha$ nicht gleichzeitig stimmen, denn

$$d\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\beta \neq d\beta \wedge \alpha + \beta \wedge d\alpha.$$

Beweis von Satz 5.1. Unter der Annahme der Existenz einer Abbildung d mit den genannten Eigenschaften werden wir zuerst in einem lokalen Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ arbeiten, um eine explizite lokale Formel für $d\omega$ herzuleiten. Wir schreiben

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} f_{i_1 \ldots i_q} \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \in \Omega^q_\ell(\mathcal{O})$$

für C^ℓ-Funktionen $f_{i_1 \ldots i_q} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Die Koordinatenfunktionen $x_j : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ sind per Annahme von der Klasse C^2, weil $k \geqslant 2$, also gilt $d(dx_j) = 0$, und durch induktives Anwenden der Leibnizregel findet man

$$d\left(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\right) = 0.$$

[12]Die Beschränkung auf den Fall $k \geqslant 3$ liegt daran, dass der Raum $\Omega^q_\ell(M)$ nur für Mannigfaltigkeiten von der Klasse $C^{\ell+1}$ definiert werden kann.

Es folgt, wieder wegen der Leibnizregel und der Formel für df in Beispiel 4.8,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1<\ldots<i_q} df_{i_1\ldots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_1<\ldots<i_q} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_q}}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \end{aligned} \tag{17}$$

also ist die Eindeutigkeit von d bewiesen. Wenn wir jetzt diese Formel als Definition von d in der Region $\mathcal{O} \subset M$ nehmen, bleibt nur noch zu zeigen, dass die Leibnizregel und $d(dw) = 0$ erfüllt sind; es folgt dann wegen Eindeutigkeit, dass die Definition von d nicht von der Koordinatenwahl abhängt. Den Beweis der Leibnizregel lassen wir als Übungsaufgabe. Für $d(d\omega) = 0$ beweisen wir zuerst den Spezialfall $d(df) = 0$ für eine C^2-Funktion $f : M \to \mathbb{R}$. Es gilt,

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j \wedge dx_i,$$

was verschwindet, weil jeder Term in der Summe von einem entsprechendem Term

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j \wedge dx_i$$

gecancelt wird; hier ist natürlich wichtig, dass $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, weil f von der Klasse C^2 ist. Der allgemeine Fall von $d(d\omega) = 0$ folgt jetzt mittels Leibnizregel von diesem Spezialfall. $\square$

5.2 Das Poincaré-Lemma

In Analysis II haben wir gesehen, dass jede stetige Funktion auf einem Intervall eine Stammfunktion von der Klasse C^1 hat. In der Sprache der Differentialformen heißt das: jede stetige 1-Form $\lambda \in \Omega_0^1(M)$ auf der 1-Mannigfaltigkeit $M := (a, b) \subset \mathbb{R}$ ist das Differential einer C^1-Funktion $f \in C^1(M) = \Omega_1^0(M)$. Um das zu sehen, betrachtet man die Identitätsabbildung $(a, b) \to (a, b) \subset \mathbb{R}$ als Koordinatensystem $x : M \to \mathbb{R}$ und schreibt $\lambda = g\, dx$ für eine stetige Funktion $g : (a, b) \to \mathbb{R}$; dann kann $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

für einen beliebig gewählten Punkt $t_0 \in (a, b)$ definiert werden, und es folgt,

$$df = \frac{df}{dx}\, dx = g\, dx = \lambda.$$

Ist eigentlich *jede* 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit M das Differential einer Funktion? Im Fall $\dim M \geqslant 2$ sehen wir von Satz 5.1, dass das nicht immer so sein kann: wenn $\lambda = df$ für $f \in C^2(M)$, dann folgt $d\lambda = d(df) = 0$.

Definition 5.3. Eine Differentialform $\omega \in \Omega_1^q(M)$ ist **geschlossen**, falls $d\omega = 0$, und $\omega \in \Omega_0^q(M)$ ist **exakt**, falls $\omega = d\lambda$ für ein $\lambda \in \Omega_1^{q-1}(M)$.

Mit dieser Terminologie ist eine 1-Form λ genau dann exakt, wenn sie Differential einer Funktion ist. Wenn wir nur stetig differenzierbare Differentialformen betrachten, dann folgt aus Satz 5.1, dass nur *geschlossene* Differentialformen exakt sein können, also kann $\lambda \in \Omega^1_1(M)$ insb. kein Differential sein, wenn $d\lambda \neq 0$. Im Fall $M = (a, b)$ war dies kein Thema, denn $d\lambda = 0$ ist automatisch für eine 1-Form auf einer 1-Mannigfaltigkeit: es gibt nämlich keine nichttrivialen 2-Formen auf M, denn laut Korollar 4.3 ist $\Lambda^2 T_p^* M$ ein trivialer Vektorraum, wenn $\dim T_p M = \dim M = 1$. Aber im Fall $\dim M \geqslant 2$ kann man sehr leicht Beispiele von nichtgeschlossenen 1-Formen finden:

Beispiel 5.4. Wir betrachten die kartesischen Koordinaten $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ und eine durch C^1-Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestimmte 1-Form $\lambda := f\, dx + g\, dy$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d\lambda &= df \wedge dx + dg \wedge dy = (\partial_x f\, dx + \partial_y f\, dy) \wedge dx + (\partial_x g\, dx + \partial_y g\, dy) \wedge dy \\ &= \partial_y f\, dy \wedge dx + \partial_x g\, dx \wedge dy = (\partial_x g - \partial_y f)\, dx \wedge dy, \end{aligned}$$

also λ ist geschlossen genau dann, wenn $\partial_x g = \partial_y f$.

Aufgabe 5.4 zeigt, dass z.B. die 1-Form $\lambda := x\, dy$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht Differential einer Funktion sein kann, denn $d\lambda = dx \wedge dy \neq 0$. Die Bedingung $\partial_x g = \partial_y f$ in diesem Kontext hat mit der Kommutativität der partiellen Ableitungen ∂_x und ∂_y zu tun: falls $\lambda = f\, dx + g\, dy = dh$ für eine C^2-Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dann bedeutet das $f = \partial_x h$ und $g = \partial_y h$, also folgt $\partial_x g = \partial_x \partial_y h = \partial_y \partial_x h = \partial_y f$. Wir werden unten sehen, dass die Bedingung $\partial_x g = \partial_y f$ auch hinreichend ist: jede 1-Form $\lambda = f\, dx + g\, dy$ auf $\mathbb{R}^2$, die diese Bedingung erfüllt, ist ein Differential.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die notwendige Bedingung $d\lambda = 0$ für ein Differential auch nicht immer hinreichend ist.

Beispiel 5.5. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ mit der glatten 1-Form

$$\lambda := -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy,$$

die

$$d\lambda = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy = 0$$

erfüllt. Die Bedeutung dieser 1-Form ist viel leichter in Polarkoordinaten zu verstehen: wir definieren $\ell_+ := (0, \infty) \times \{0\} \subset M$ und $\ell_- := (-\infty, 0) \times \{0\} \subset M$, und betrachten auf $\mathcal{U}_\pm := M \backslash \ell_\pm$ die Koordinatensysteme

$$M \supset \mathcal{U}_+ \xrightarrow{(r, \theta_+)} (0, \infty) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2, \qquad M \supset \mathcal{U}_- \xrightarrow{(r, \theta_-)} (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}^2,$$

die eindeutig durch $x = r \cos \theta_\pm$ und $y = r \sin \theta_\pm$ bestimmt werden. Auf $\mathcal{U}_\pm$ können wir jetzt x und y als Funktionen der Koordinaten $(r, \theta_\pm)$ betrachten, und es folgt

$$\begin{aligned} dx &= r\, d(\cos \theta_\pm) + (\cos \theta_\pm)\, dr = -r(\sin \theta_\pm)\, d\theta_\pm + (\cos \theta_\pm)\, dr \\ dy &= r\, d(\sin \theta_\pm) + (\sin \theta_\pm)\, dr = r(\cos \theta_\pm)\, d\theta_\pm + (\sin \theta_\pm)\, dr, \end{aligned}$$

und daher,

$$\lambda = -\frac{r \sin \theta_\pm}{r^2} \left[-r(\sin \theta_\pm)\, d\theta_\pm + (\cos \theta_\pm)\, dr \right] + \frac{r \cos \theta_\pm}{r^2} \left[r(\cos \theta_\pm)\, d\theta_\pm + (\sin \theta_\pm)\, dr \right] = d\theta_\pm.$$

Aus diesem Grund wird λ oft als "$\lambda = d\theta$" geschrieben, aber diese Schreibweise täuscht, denn obwohl die Einschränkungen von λ auf die offenen Teilmengen $\mathcal{U}_\pm \subset M$ tatsächlich durch Differential der Funktionen $\theta_\pm : \mathcal{U}_\pm \to \mathbb{R}$ gegeben sind, existiert doch keine C^1-Funktion f auf ganz M mit $df = \lambda$. Wenn es so eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ geben würde, dann hätte f überall auf $\mathcal{U}_+$ die gleiche Ableitung wie θ_+, und da $\mathcal{U}_+$ zusammenhängend ist, könnten wir dann eine Konstante mit f addieren und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f|_{\mathcal{U}_+} = \theta_+$ annehmen. Aber f müsste auch auf ℓ_+ wohl definiert und stetig sein, und θ_+ kann bestimmt nicht von $\mathcal{U}_+ = M \backslash \ell_+$ auf M als stetige Funktion fortgesetzt werden, denn z.B.

$$\lim_{t \to 0^+} \theta_+(\cos t, \sin t) = 0 \neq 2\pi = \lim_{t \to 0^-} \theta_+(\cos t, \sin t).$$

Das Phänomen in Beispiel 5.5 ist *topologisch*: die Existenz einer geschlossenen aber nicht exakten 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ hat damit zu tun, dass $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ein "Loch" hat. In der algebraischen Topologie kann man die Existenz solcher Löcher in einer Mannigfaltigkeit durch algebraische Invarianten messen, z.B. die *De Rham Kohomologie*, die als Quotient des Raumes von geschlossenen Differentialformen durch den Raum von exakten Differentialformen definiert wird. Da dies keine Vorlesung über Topologie ist, werden wir hier nicht weiter auf solche Themen eingehen, insb. werden wir nicht versuchen, allgemeine Bedingungen für die Exaktheit einer geschlossenen Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit zu formulieren. Durch Analysis kann das Problem aber rein *lokal* gelöst werden:

Satz 5.6 (Poincaré-Lemma)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit mit $k \geqslant 2$, und sei $\omega \in \Omega^q_\ell(M)$ eine geschlossene q-Form von der Klasse C^ℓ, mit $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$ und $q \geqslant 1$. Dann gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subset M$ von p und eine $(q-1)$-Form $\lambda \in \Omega^{q-1}_\ell(\mathcal{U})$ mit $d\lambda = \omega$ auf $\mathcal{U}$.*

Weil die Aussage des Poincaré-Lemmas lokal ist und Koordinaten auf hinreichend kleinen Umgebungen immer gewählt werden können, wird es reichen, wenn wir das Lemma für den Spezialfall

$$M := Q_m := (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_m, b_m) \subset \mathbb{R}^m$$

beweisen. Wir werden tatsächlich zeigen, dass jede geschlossene q-Form auf Q_m für $q \geqslant 1$ exakt ist. Im Fall $m = 1$ ist das Problem schon gelöst, denn für jede 1-Form λ auf (a_1, b_1) findet man durch Integration eine Funktion f mit $df = \lambda$, und q-Formen auf (a_1, b_1) mit $q \geqslant 2$ sind sowieso trivial. Wir gehen also induktiv vor, indem wir eine Konstante $t_0 \in (a_1, b_1)$ wählen und annehmen, das Problem sei auf

$$Q_{m-1} := \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in Q_m \;\middle|\; x_1 = t_0 \right\} \cong (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_m, b_m)$$

schon gelöst. Im Folgenden benutzen wir die kartesischen Koordinaten $(x_1, \ldots, x_m) : Q_m \to \mathbb{R}^m$ und $(x_2, \ldots, x_m) : Q_{m-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ als Koordinatensysteme auf Q_m bzw. Q_{m-1}, und wir schreiben auch

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) =: (x_1, \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1} = \mathbb{R}^m,$$

so dass Funktionen $f : Q_{m-1} \to \mathbb{R}$ als Funktionen der Variablen $\hat{\mathbf{x}} = (x_2, \ldots, x_m)$ betrachtet werden. Die Tangentialräume $T_{\mathbf{x}} Q_m$ sind alle $\mathbb{R}^m$, also können q-Formen $\omega \in \Omega^q_\ell(Q_m)$ von der Klasse C^ℓ genauso gut als C^ℓ-Funktionen auf Q_m mit Werten im Vektorraum $\Lambda^q(\mathbb{R}^m)^*$ betrachtet werden. Gleichfalls sind alle Tangentialräume von Q_{m-1} der feste Unterraum $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$, also gibt es eine natürliche lineare Abbildung

$$\Pi : \Omega^q_\ell(Q_m) \to \Omega^q_\ell(Q_{m-1}), \qquad (\Pi\omega)_{\hat{\mathbf{x}}}(X_1, \ldots, X_q) := \omega_{(t_0, \hat{\mathbf{x}})}(X_1, \ldots, X_q).$$

Aufgabe 5.7. Beweisen Sie: für alle $\omega \in \Omega^q_1(Q_m)$ gilt $\Pi(d\omega) = d(\Pi\omega)$.

Um die allgemeine Konstruktion ein bisschen zu motivieren, betrachten wir zuerst den Spezialfall $q = 1$: gegeben ist also eine geschlossene 1-Form $\omega \in \Omega^1_\ell(Q_m)$, und wir suchen nach einer Funktion $f \in C^\ell(Q_m)$ mit $df = \omega$. Laut Aufgabe 5.7 ist $\Pi\omega \in \Omega^q_\ell(Q_{m-1})$ auch geschlossen, also liefert die Induktionsvoraussetzung eine C^ℓ-Funktion $f_0 : Q_{m-1} \to \mathbb{R}$ mit $df_0 = \Pi\omega$. Wenn eine C^ℓ-Funktion $f : Q_m \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ und $f|_{Q_{m-1}} = f_0$ existiert, dann ist sie jetzt eindeutig bestimmt, denn für alle $\mathbf{x} \in Q_m$ gilt

$$\partial_1 f(\mathbf{x}) = (df)_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_1) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_1) \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = f_0(\hat{\mathbf{x}}) + \int_{t_0}^{x_1} \omega_{(t,\hat{\mathbf{x}})}(\mathbf{e}_1)\, dt,$$

wobei $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ wie immer die Standardbasis von $\mathbb{R}^m$ bezeichnet. Aus der Voraussetzung $d\omega = 0$ kann jetzt $df = \omega$ bewiesen werden.

Eine analoge Konstruktion für q-Formen mit $q > 1$ findet man mit Hilfe der folgenden algebraischen Struktur.

Definition 5.8. Sei ω eine q-Form auf M und X ein Vektorfeld, d.h. X ist eine Zuordnung, welche in jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X(p) \in T_pM$ auszeichnet. Das **innere Produkt** von X mit ω ist die $(q-1)$-Form $\iota_X\omega$ gegeben durch

$$(\iota_X\omega)_p(Y_1, \ldots, Y_{q-1}) := \omega_p(X(p), Y_1, \ldots, Y_{q-1}).$$

Sei $\omega \in \Omega^q_\ell(Q_m)$, also hat ω eine Koordinatendarstellung

$$\omega = \sum_{1<i_2<\ldots<i_q} g_{i_2\ldots i_q}\, dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + \sum_{1<i_1\ldots<i_q} h_{i_1\ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \tag{18}$$

mit C^ℓ-Funktionen $g_{i_2\ldots i_q}, h_{i_1\ldots i_q} : Q_m \to \mathbb{R}$. Da $T_{\mathbf{x}}Q_m = \mathbb{R}^m$ für jedes $\mathbf{x} \in Q_m$, können wir den Basisvektor $\mathbf{e}_1$ auch als (konstantes) Vektorfeld auf Q_m betrachten.

Lemma 5.9. *Jedes $\omega \in \Omega^q_\ell(Q_m)$ erfüllt*

$$\omega = dx_1 \wedge \iota_{\mathbf{e}_1}\omega + \beta$$

für ein $\beta \in \Omega^q_\ell(Q_m)$ mit $\iota_{\mathbf{e}_1}\beta = 0$.

Beweis. Dies sieht man aus der Koordinatendarstellung (18), denn wegen Aufgabe 4.1(5) folgt

$$\iota_{\mathbf{e}_1}\left(g_{i_2\ldots i_q}\, dx_1 \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\right) = g_{i_2\ldots i_q}\, dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

und für $1 < i_1 < \ldots < i_q$,

$$\iota_{\mathbf{e}_1}\left(h_{i_1\ldots i_q}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}\right) = 0.$$

□

Jetzt nehmen wir an, ω sei geschlossen, und auf $Q_{m-1} \subset Q_m$ wurde eine $(q-1)$-Form $\lambda_0 \in \Omega^{q-1}_\ell(Q_{m-1})$ mit $d\lambda_0 = \Pi\omega$ schon gefunden. Wir könnten λ_0 auch als $(q-1)$-Form auf Q_m betrachten, mit einer Koordinatendarstellung, in der alle Funktionen unabhängig von x_1 sind und dx_1 nie erscheint; Letzteres ist äquivalent zur Bedingung $\iota_{\mathbf{e}_1}\lambda_0 = 0$. Suchen wir jetzt nach einer $(q-1)$-Form λ auf Q_m, die $\iota_{\mathbf{e}_1}\lambda = 0$ und $d\lambda = \omega$ erfüllt und in $Q_{m-1} \subset Q_m$ mit λ_0 übereinstimmt. Die Bedingung $\iota_{\mathbf{e}_1}\lambda = 0$ bedeutet, dass λ eine Koordinatendarstellung der Form

$$\lambda = \sum_{1<i_1<\ldots<i_{q-1}} f_{i_1\ldots i_{q-1}}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$$

mit Funktionen $f_{i_1\ldots i_q} : Q_m \to \mathbb{R}$ hat, und es folgt,

$$\omega = d\lambda = \sum_{1<i_1<\ldots<i_{q-1}} \partial_1 f_{i_1\ldots i_{q-1}}\, dx_1 \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} + \beta$$

für eine q-Form β mit $\iota_{\mathbf{e}_1}\beta = 0$. Die Ableitungen $\partial_1 f_{i_1\ldots i_{q-1}}$ werden also durch die $(q-1)$-Form $\iota_{\mathbf{e}_1}\omega$ eindeutig bestimmt, und es folgt,

$$\lambda_{\mathbf{x}} = (\lambda_0)_{\hat{\mathbf{x}}} + \int_{t_0}^{x_1} (\iota_{\mathbf{e}_1}\omega)_{(t,\hat{\mathbf{x}})}\, dt \in \Lambda^{q-1}(\mathbb{R}^m)^*,$$

wobei das Integral nicht als Integral einer Differentialform auf einer Mannigfaltigkeit sondern als Integral einer Funktion auf einem Intervall mit Werten im Vektorraum $\Lambda^{q-1}(\mathbb{R}^m)^*$ zu verstehen ist.

Soweit die Motivation; wir müssen jetzt beweisen, dass diese Idee tatsächlich Lösungen λ zur Gleichung $d\lambda = \omega$ liefert. Für den Beweis wird es hilfreich sein, auch nichtgeschlossene q-Formen ω betrachten zu dürfen. Im Fall $m = 1$ ist das egal, denn alle q-Formen auf Q_1 mit $q \geqslant 1$ sind geschlossen, also definieren wir lineare Abbildungen

$$P_1^q : \Omega_\ell^q(Q_1) \to \Omega_\ell^{q-1}(Q_1), \qquad (P_1^1\omega)(x) := \int_{t_0}^{x} (\iota_{\mathbf{e}_1}\omega)_t\, dt,$$

wobei P_1^q für $q \geqslant 2$ natürlich trivial ist. Die Funktion $f := P_1^1\omega$ ist dann eigentlich von der Klasse $C^{\ell+1}$ und erfüllt $df = \omega$. Für $m \geqslant 2$ definieren wir dann induktiv,

$$P_m^q : \Omega_\ell^q(Q_m) \to \Omega_\ell^{q-1}(Q_m), \qquad (P_m^q\omega)_{\mathbf{x}} := (P_{m-1}^q \Pi\omega)_{\hat{\mathbf{x}}} + \int_{t_0}^{x_1} (\iota_{\mathbf{e}_1}\omega)_{(t,\hat{\mathbf{x}})}\, dt.$$

Satz 5.6 ist nun eine direkte Konsequenz des folgenden Resultats:

Lemma 5.10. *Für alle $m, q, \ell \geqslant 1$ und $\omega \in \Omega_\ell^q(Q_m)$ gilt $(dP_m^q + P_m^{q+1}d)\omega = \omega$.*[13]

Beweis. Für $m = 1$ ist die Aussage nur bei $q = 1$ nichttrivial, und da $d\omega = 0$ automatisch in diesem Fall, folgt es von $dP_1^1\omega = \omega$. Für $m \geqslant 2$ nehmen wir jetzt induktiv an, die Aussage sei für P_{m-1}^q mit allen $q \geqslant 1$ schon bewiesen. Weil $dP_m^q + P_m^{q+1}d : \Omega_\ell^q(Q_m) \to \Omega_{\ell-1}^q(Q_m)$ eine lineare Abbildung ist, reicht es, wenn wir nur alle Spezialfälle der Form

$$\omega = g\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \qquad \text{für} \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant m \text{ und } g \in C^\ell(Q_m)$$

betrachten. Dabei gibt es zwei qualitativ verschiedene Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $i_1 = 1$.
Wir schreiben $d\mathbf{x}^\alpha := dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, also $\omega = g\, dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha$ und $\iota_{\mathbf{e}_1}\omega = g\, d\mathbf{x}^\alpha$. In diesem Fall ist $\Pi\omega$ trivial, denn dx_1 ist 0 auf jeden Vektor in $T_{\hat{\mathbf{x}}}Q_{m-1} = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. Es folgt,

$$(P_m^q\omega)_{\mathbf{x}} = \left(\int_{t_0}^{x_1} g(t, \hat{\mathbf{x}})\, dt\right) d\mathbf{x}^\alpha,$$

[13]In der Vorlesung wurde der Beweis deises Lemmas aus Zeitgründen weggelassen.

und daher

$$(dP^q_m\omega)_{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})\,dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha + \sum_{j=2}^{m} \left(\int_{t_0}^{x_1} \partial_j g(t,\widehat{\mathbf{x}})\,dt \right) dx_j \wedge d\mathbf{x}^\alpha. \tag{19}$$

Andererseits gilt $d\omega = dg \wedge dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha = \sum_{j=2}^m \partial_j g\,dx_j \wedge dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha = -\sum_{j=2}^m \partial_j g\,dx_1 \wedge dx_j \wedge d\mathbf{x}^\alpha$, also $\Pi(d\omega) = 0$ und $\iota_{\mathbf{e}_1} d\omega = -\sum_{j=2}^m \partial_j g\,dx_j \wedge d\mathbf{x}^\alpha$, und daher

$$(P^{q+1}_m d\omega)_{\mathbf{x}} = -\sum_{j=2}^{m} \left(\int_{t_0}^{x_1} \partial_j g(t,\widehat{\mathbf{x}})\,dt \right) dx_j \wedge d\mathbf{x}^\alpha. \tag{20}$$

Die Summe von (19) und (20) ist $g\,dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha = \omega$.

Fall 2: $i_1 \geqslant 2$.
Wir schreiben $d\mathbf{x}^\alpha := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}$, also $\omega = g\,d\mathbf{x}^\alpha$, und jetzt gilt $\iota_{\mathbf{e}_1}\omega = 0$ aber $\Pi\omega = (g|_{Q_{m-1}})\,d\mathbf{x}^\alpha$. Es folgt, $(P^q_m\omega)_{\mathbf{x}} = (P^q_{m-1}\Pi\omega)_{\widehat{\mathbf{x}}}$, und da diese $(q-1)$-Form auf Q_m unabhängig von x_1 ist und keinen Term mit dx_1 hat,

$$(dP^q_m\omega)_{\mathbf{x}} = (dP^q_{m-1}\Pi\omega)_{\widehat{\mathbf{x}}}. \tag{21}$$

Andererseits gilt $d\omega = dg \wedge d\mathbf{x}^\alpha = \partial_1 g\,dx_1 \wedge d\mathbf{x}^\alpha + \sum_{j=2}^m \partial_j g\,dx_j \wedge d\mathbf{x}^\alpha$, also $\iota_{\mathbf{e}_1} d\omega = \partial_1 g\,d\mathbf{x}^\alpha$ und (nach Aufgabe 5.7) $\Pi(d\omega) = d(\Pi\omega)$, und daher

$$(P^{q+1}_m d\omega)_{\mathbf{x}} = (P^{q+1}_{m-1} d\Pi\omega)_{\widehat{\mathbf{x}}} + \left(\int_{t_0}^{x_1} \partial_1 g(t,\widehat{\mathbf{x}})\,dt \right) d\mathbf{x}^\alpha. \tag{22}$$

Laut Induktionsvoraussetzung ist die Summe von (21) und (22),

$$\begin{aligned}(dP^q_m\omega + P^{q+1}_m d\omega)_{\mathbf{x}} &= (\Pi\omega)_{\widehat{\mathbf{x}}} + \left(\int_{t_0}^{x_1} \partial_1 g(t,\widehat{\mathbf{x}})\,dt \right) d\mathbf{x}^\alpha = \left(g(t_0,\widehat{\mathbf{x}}) + \int_{t_0}^{x_1} \partial_1 g(t,\widehat{\mathbf{x}})\,dt \right) d\mathbf{x}^\alpha \\ &= g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}^\alpha = \omega_{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

□

6 Der Satz von Stokes

6.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Die Mannigfaltigkeiten, die wir bisher in dieser Vorlesung betrachtet haben, waren alle "ohne Rand". Das gilt sogar Beispielen wie dem *offenen Halbraum*

$$\mathring{\mathbb{H}}^n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 < 0 \right\},$$

der als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ automatisch auch eine (n-dimensionale) Untermannigfaltigkeit davon ist (s. Beispiel 1.13). Der offene Halbraum ist das Innere des abgeschlossenen Halbraums[14]

$$\mathbb{H}^n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \leqslant 0 \right\},$$

[14] Man findet in verschiedenen Quellen leicht verschiedene Definitionen vom Halbraum $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$, z.B. oft als $\{x_n \geqslant 0\}$ oder $\{x_1 \geqslant 0\}$ statt $\{x_1 \leqslant 0\}$. Für die wichtige Definition des Begriffes "Mannigfaltigkeit mit Rand" ist es egal, welche Variante man nimmt, aber unsere Version der Definition wird besonders für die Diskussion von Orientierungen gut geeignet sein.

und $\mathbb{H}^n$ ist ebenfalls der Abschluss von $\mathring{\mathbb{H}}^n$; als Teilmengen des metrischen Raumes $\mathbb{R}^n$ haben beide also den selben Rand (s. [Bau12, Definition 2.6])

$$\partial\mathbb{H}^n = \partial\mathring{\mathbb{H}}^n := \mathbb{H}^n \backslash \mathring{\mathbb{H}}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 = 0\right\}.$$

Im Kontext von Mannigfaltigkeiten wird aber das Wort “Rand” ein bisschen anders als bei metrischen Räumen definiert: der Rand ∂M einer Mannigfaltigkeit M soll in der Differentialgeometrie immer eine Teilmenge von M sein, und weil $\partial\mathbb{H}^n$ disjunkt von $\mathring{\mathbb{H}}^n$ ist, sagt man also, dass $\mathring{\mathbb{H}}^n$ keinen Rand hat.[15] Bei $\mathbb{H}^n$ sieht das anders aus, aber $\mathbb{H}^n$ erfüllt unsere bisherige Definition vom Begriff *Untermannigfaltigkeit* nicht; insb. haben Punkte $p \in \partial\mathbb{H}^n \subset \mathbb{H}^n$ keine Umgebungen, die Karten mit den in Definition 1.7 beschriebenen Eigenschaften zulassen. Um dieses Beispiel betrachten zu können, muss unsere Definition von Untermannigfaltigkeit jetzt verallgemeinert werden.

Definition 6.1. Es seien $n \geqslant m \geqslant 0$ ganze Zahlen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit Rand** (oder kurz: **Mannigfaltigkeit mit Rand**), falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von p und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ nach einer offenen Teilmenge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$M \cap \mathcal{U} = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^m \times \{0\}).$$

Der C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ wird weiterhin eine **Karte** um p genannt. Der **Rand von M** ist die Teilmenge

$$\partial M := \left\{p \in M \;\middle|\; p \in \varphi^{-1}(\partial\mathbb{H}^m \times \{0\}) \text{ für eine Karte } \varphi \text{ um } p\right\}.$$

Bemerkung 6.2. In der obigen Definition darf es für eine gegebene Karte $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ sein, dass das Bild von φ nur das Innere $\mathring{\mathbb{H}}^m \times \{0\}$ und nie den Rand $\partial\mathbb{H}^m \times \{0\}$ berührt; das wird nämlich so sein, wenn die Umgebung $\mathcal{U}$ keine Punkte im Rand ∂M enthält. Jede Untermannigfaltigkeit ohne Rand (also nach unserer bisherigen Definition) kann von Karten dieser Art überdeckt werden, denn für eine gegebene Karte $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ mit $\mathcal{U} \cap M = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$ und einen Punkt $p \in \mathcal{U}$ kann man immer eine kleinere Umgebung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ von p finden und das Bild von $\varphi|_{\mathcal{U}'}$ mit einer Translation in $\mathbb{R}^n$ schieben, damit $\varphi(\mathcal{U}' \cap M)$ nach dieser Translation in $\mathring{\mathbb{H}}^m \times \{0\}$ liegt. Aus diesem Grund erfüllt jede Mannigfaltigkeit nach der bisherigen Definition auch die neue Definition: die bisher betrachteten Mannigfaltigkeiten M waren genau die, die $\partial M = \varnothing$ erfüllen.

Sowie bei unserer früheren Definition bestimmt jede Karte $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ auf einer Mannigfaltigkeit M mit Rand ein Koordinatensystem $M \supset \mathcal{U} \cap M =: \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^m$, wobei das Bild $x(\mathcal{O}) = \mathcal{W}$ jetzt eine offene Teilmenge vom Halbraum $\mathbb{H}^m$ ist, und deswegen nicht unbedingt offen in $\mathbb{R}^n$, z.B. Punkte $\mathbf{t} \in \mathcal{W} \cap \partial\mathbb{H}^n$ haben keine in $\mathbb{R}^n$ offenen Umgebungen, die auch in $\mathcal{W}$ enthalten sind. Ebenfalls bestimmen zwei Koordinatensysteme $M \supset \mathcal{O}_x \xrightarrow{x} \mathcal{W}_x \subset \mathbb{H}^m$ und $M \supset \mathcal{O}_y \xrightarrow{y} \mathcal{W}_y \subset \mathbb{H}^m$ genau wie bei Definition 2.2 einen Kartenübergang

$$\mathbb{H}^m \supset x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \xrightarrow{y \circ x^{-1}} y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y) \subset \mathbb{H}^m,$$

und man kann wie in Proposition 2.3 zeigen, dass Kartenübergänge immer von der Klasse C^k sind. Da $x(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$ und $y(\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y)$ offene Teilmenge von $\mathbb{H}^m$ aber nicht unbedingt offen in $\mathbb{R}^m$ sind, gibt es bei dieser Aussage noch etwas Erklärungsbedarf. Für eine

[15] Die unterschiedliche Terminologie liegt zum Teil daran, dass abstrakte Mannigfaltigkeiten in der Regel nicht als Teilmengen eines größeren metrischen Raumes wie $\mathbb{R}^n$ präsentiert werden, sondern metrische (oder besser: topologische) Räume an sich sind.

beliebige Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^m$ sagt man, eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}^q$ sei von der Klasse C^k, falls f sich als Funktion von der Klasse C^k auf eine offene Umgebung von $E \subset \mathbb{R}^m$ fortsetzen lässt, und analog ist eine Abbildung $f : E \to F$ zwischen zwei beliebigen Teilmengen $E, F \subset \mathbb{R}^m$ ein **C^k-Diffeomorphismus**, falls sie sich als C^k-Diffeomorphismus zwischen offenen Umgebungen von E und F fortsetzen lässt. Wenn Sie den Beweis von Proposition 2.3 nochmal anschauen, werden Sie sehen, dass die Kartenübergänge für eine Untermannigfaltigkeit mit Rand genau diese Bedingung erfüllen.

Lemma 6.3. *Es seien $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^m$ offene Teilmengen von $\mathbb{H}^m$ mit $m \geqslant 2$ und $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ ein C^k-Diffeomorphismus mit $k \geqslant 1$. Dann gilt: $\psi(\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m) = \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{H}^m$, die eingeschränkte Abbildung*

$$\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m \xrightarrow{\psi} \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{H}^m \tag{23}$$

ist auch ein C^k-Diffeomorphismus (zwischen offenen Teilmengen des Vektorraums $\partial\mathbb{H}^m \cong \mathbb{R}^{m-1}$), und er ist orientierungserhaltend genau dann, wenn ψ auf einer Umgebung von $\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m \subset \mathcal{U}$ orientierungserhaltend ist.

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m$ mit $\psi(\mathbf{x}) \in \mathcal{V} \cap \mathring{\mathbb{H}}^m$. Dann folgt vom Umkehrsatz, dass ψ^{-1} eine Umgebung von $\psi(\mathbf{x})$ surjektiv auf eine in $\mathbb{R}^m$ offene Umgebung von $\mathbf{x}$ abbildet, was unmöglich ist, weil keine in $\mathbb{R}^m$ offene Umgebung von $\mathbf{x}$ in $\mathbb{H}^m$ enthalten ist. Dies beweist $\psi(\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{H}^m$, und das gleiche Argument für die Umkehrabbildung beweist $\psi^{-1}(\mathcal{V} \cap \partial\mathbb{H}^m) \subset \mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m$, also definiert ψ eine Bijetion $\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m \to \mathcal{V} \cap \partial\mathbb{H}^m$. Als Einschränkung einer auf einer in $\mathbb{R}^m$ offenen Umgebung von $\mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m$ definierten C^k-Abbildung ist diese Bijektion auch von der Klasse C^k, und die Umkehrabbildung gleichfalls, also ist die eingeschränkte Abbildung ein C^k-Diffeomorphismus.

Jetzt betrachten wir die Determinante der Jacobimatrix in einem Punkt $\mathbf{x} = (0, \hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{U} \cap \partial\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Da ψ die Teilmenge $\{x_1 = 0\}$ in sich selbst abbildet, sind die partiellen Ableitungen nach x_j für $j = 2, \ldots, m$ alle in $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$, also hat diese Jacobimatrix die Form

$$D\psi(0, \hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \mathbf{v} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$ die Jacobimatrix der eingeschränkten Abbildung (23) im Punkt $\hat{\mathbf{x}}$ ist. Es folgt, $\mathrm{Det} D\psi(0, \hat{\mathbf{x}}) = a \cdot \mathrm{Det}\mathbf{B}$. Diese Determinante darf nicht 0 sein, denn ψ ist ein Diffeomorphismus, also folgt $a \neq 0$. Falls $a < 0$, dann hat der Vektor $\partial_1\psi(0, \hat{\mathbf{x}}) = \partial_t\psi(t, \hat{\mathbf{x}})|_{t=0} \in \mathbb{R}^m$ eine negative x_1-Koordinate, aber dies ist nicht möglich, weil $\psi(t, \hat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{H}^m$ für $t \leqslant 0$. Daher gilt $a > 0$, also haben $\mathrm{Det} D\psi(0, \hat{\mathbf{x}})$ und $\mathrm{Det}\mathbf{B}$ das gleiche Vorzeichen. □

Lemma 6.4. *Wenn $p \in \partial M$, dann gilt $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^m \times \{0\}$ für* alle *Karten $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ um p.*

Beweis. Sonst gibt es zwei Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O}_x \xrightarrow{x} \mathcal{W}_x \subset \mathbb{H}^m$ und $M \supset \mathcal{O}_y \xrightarrow{y} \mathcal{W}_y \subset \mathbb{H}^m$ um p mit $x(p) \in \partial\mathbb{H}^m$ aber $y(p) \in \mathring{\mathbb{H}}^m$, also bildet der Kartenübergang $y \circ x^{-1}$ einen Punkt in $\partial\mathbb{H}^m$ nach einem Punkt in $\mathring{\mathbb{H}}^m$, was Lemma 6.3 widerspricht. □

Proposition 6.5. *Für eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand ist der Rand $\partial M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(m-1)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ohne Rand, d.h. $\partial(\partial M) = \varnothing$.*

Beweis. Sei $p \in \partial M$ und $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ eine Karte um p. Nach Lemma 6.4 ist ein Punkt $p' \in \mathcal{U}$ genau dann in ∂M, wenn $\varphi(p') \in \partial\mathbb{H}^m \times \{0\}$. Wir definieren $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (x_2, \ldots, x_n, x_1)$, dann ist $\varphi_\partial := \sigma \circ \varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}_\partial := \sigma(\mathcal{V})$ ein C^k-Diffeomorphismus mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{U} \cap \partial M = \varphi_\partial^{-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$ für den Unterraum $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m+1} = \mathbb{R}^n$. $\square$

Aufgabe 6.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ der Abschluss einer in $\mathbb{R}^n$ offenen Menge $\mathring{\Omega}$ mit der Eigenschaft, dass der (im Sinne von metrischen Räumen) Rand $\Omega \backslash \mathring{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dann eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial\Omega = \Omega \backslash \mathring{\Omega}$ ist.
Hinweis: Für Punkte p im Inneren von Ω reicht die Identitätsabbildung auf einer kleinen Umgebung als Karte um p. Für $p \in \partial\Omega$ kann man durch die gleiche Idee wie in Proposition 6.5 aus einer Karte für $\partial\Omega$ um p eine passende Karte für Ω um p bauen.

Der bisherige Definition der Tangentialräume $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ muss für den Fall $p \in \partial M$ auch leicht modifiziert werden.

Definition 6.7. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $p \in M$ definieren wir den Tangentialraum

$$T_pM := \Big\{ X \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; X = \gamma'(0) \text{ für ein } \epsilon > 0 \text{ und eine stetig differenzierbare Funktion } \gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n \text{ mit } \gamma(0) = p \text{ und } \gamma([0, \epsilon)) \subset M \text{ oder } \gamma((-\epsilon, 0]) \subset M \Big\}.$$

Der Sinn dieser Definition ist, dass ein Weg $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(0) = p \in \partial M$ durch den Rand aus M entkommen oder von außen in M einfahren könnte, und wir möchten Geschwindigkeitsvektoren solcher Wege auch im Tangentialraum mit einschließen.

Aufgabe 6.8. Zeigen Sie, dass für eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand, $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ immer ein m-dimensionaler linearer Unterraum ist, und für einen Randpunkt $p \in \partial M$ ist $T_p(\partial M)$ immer ein linearer Unterraum von T_pM.

6.2 Orientierungen

Für eine Mannigfaltigkeit M von Dimension $m \geqslant 2$ mit Rand ist die Definition des Begriffs *Orientierung* genau wie bei Mannigfaltigkeiten ohne Rand: wichtig ist nur, dass man für Kartenübergänge zwischen offenen Teilmengen in $\mathbb{H}^m$ zwischen orientierungserhaltenden und orientierungsumkehrenden Diffeomorphismen unterscheiden kann. Wir wollen jetzt zeigen, dass eine Orientierung auf M auch eine natürliche Orientierung auf ∂M induziert. Dies wird durch die folgende sofortige Konsequenz von Lemma 6.3 ermöglicht:

Lemma 6.9. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand, mit Dimension $m \geqslant 2$, und sei $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein orientierter Atlas auf M. Sei $\{\psi_\beta : \mathcal{U}'_\beta \to \mathcal{V}'_\beta\}_{\beta \in J}$ ein Atlas auf ∂M, der dadurch gebaut wird, dass man aus jeder Karte φ_α mit $\mathcal{U}_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$ eine entsprechende Karte für ∂M so wie im Beweis von Proposition 6.5 definiert. Dann ist der Atlas $\{\psi_\beta : \mathcal{U}'_\beta \to \mathcal{V}'_\beta\}_{\beta \in J}$ für ∂M auch orientiert.* $\square$

Für eine orientierte Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ von Dimension $m \geqslant 2$ definieren wir nun die **Randorientierung** von ∂M, indem wir einen orientierten Atlas für M wählen und durch Lemma 6.9 daraus einen orientierten Atlas für ∂M bauen.

Im Fall $m = 1$ gibt es ein paar Besonderheiten. Der Rand $\partial\mathbb{H}^1$ ist jetzt ein einzelner Punkt, und das Analogon von Lemma 6.3 für diesen Fall ist die Aussage, dass für zwei offene Teilmengen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{H}^1$, ein C^k-Diffeomorphismus $\psi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ den Punkt $\partial\mathbb{H}^1$ nach sich selbst abbilden muss, und in einer Umgebung dieses Punktes muss ψ *immer* orientierungserhaltend sein. Es ist nämlich klar, dass es z.B. keinen orientierungsumkehrenden Diffeomorphismus $\psi : (-1,0] \to (-1,0]$ mit $\psi(0) = 0$ gibt. Aber dies stellt für uns ein kleines Problem dar, denn z.B. das Intervall $[0,1]$ ist freilich eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, aber nach der aktuellen Definition kann kein Atlas für $[0,1]$ orientiert sein. Die Lösung ist, dass wir etwas mehr Freiheit in der Gestalt einer Karte erlauben. Im Folgenden schreiben wir

$$\mathbb{H}^1_+ := [0,\infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \mathbb{H}^1_- := \mathbb{H}^1 = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}.$$

Definition 6.10. Eine **(positive/negative) Randkarte** für eine 1-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand ist ein C^k-Diffeomorphismus $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ zwischen offenen Teilmengen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\mathcal{U} \cap M = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^1_- \times \{0\})$ im positiven Fall und $\mathcal{U} \cap M = \varphi^{-1}(\mathbb{H}^1_+ \times \{0\})$ im negativen Fall.[16] Ein **orientierter Atlas** auf M ist dann ein System von Karten und Randkarten $\{\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in I}$, so dass $M \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ und alle daraus entstehenden Kartenübergänge orientierungserhaltend sind.

Mit diesem erweiterten Begriff von orientiertem Atlas für eine 1-Mannigfaltigkeit mit Rand wird der Begriff **Orientierung** auf so einer Mannigfaltigkeit genau so wie früher definiert. Auf einer orientierten 1-Mannigfaltigkeit M ist nun für jeden Punkt $p \in \partial M$ zu beachten, dass alle orientierten Randkarten um diesen Punkt entweder positiv oder negativ sind; beide kann es in einem orientierten Atlas nicht geben, denn der daraus entstehende Kartenübergang könnte nicht orientierungserhaltend sein.

Die zweite Besonderheit ist, dass wir noch nie eigentlich diskutiert haben, was der Begriff "Orientierung" für eine 0-Mannigfaltigkeit bedeuten soll. Es ist nicht ganz offensichtlich, denn eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist nichts anderes als eine diskrete Teilmenge, und Kartenübergänge dafür sind nur Bijektionen zwischen diskreten Mengen; es gibt keine bedeutende Unterscheidung zwischen *orientierungserhaltend* und *orientierungsumkehrend* für solche Bijektionen. Man muss 0-Mannigfaltigkeiten einfach als Sonderfall betrachten und sich eine Definition ausdenken, die für weitere Anwendungen funktioniert. Die nächsten zwei Definitionen könnten also beim ersten Blick etwas seltsam aussehen, aber sie sind genau das, was man für die Formulierung des 1-dimensionalen Falls vom Satz von Stokes braucht.

Definition 6.11. Eine **Orientierung** auf einer 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\sigma : M \to \{1, -1\}$.

Definition 6.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Die **Randorientierung** von ∂M wird durch

$$\sigma(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls alle orientierten Randkarten für } M \text{ um } p \text{ positiv sind,} \\ -1 & \text{falls alle orientierten Randkarten für } M \text{ um } p \text{ negativ sind} \end{cases}$$

definiert.

Beispiel 6.13. Ein kompaktes Intervall $M := [a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $b > a$ ist eine 1-Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \{a, b\}$, und hat eine kanonische Orientierung, so dass die Identitätsabbildung auf einer Umgebung eines beliebigen Punktes $t \in (a,b)$ als orientierte Karte betrachtet wird. Orientierte Randkarten um a bzw. b müssen dann Bild in $\mathbb{H}^1_+$ bzw. $\mathbb{H}^1_-$ haben, die Randorientierung $\sigma : \partial M \to \{1, -1\}$ ist also durch $\sigma(b) = 1$ und $\sigma(a) = -1$ gegeben.

[16] Die Vorzeichen in dieser Definition sind richtig; es ist kein Schreibfehler.

6.3 Integration

Zur Definition des Integrals $\int_M \omega$ einer m-Form mit kompaktem Träger über einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand ist nichts hinzuzufügen: den einzigen Unterschied sieht man in der lokalen Formel bzgl. einer Parametrisierung $\psi_x : \mathcal{W}_x \to \mathcal{O}_x \subset M$, da $\mathcal{W}_x$ im Allgemeinen jetzt eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^m$ (oder im Fall $m = 1$, $\mathbb{H}^1_\pm$) ist und nicht unbegingt offen in $\mathbb{R}^m$. Haupsache: $\mathcal{W}_x$ ist auf jeden Fall messbar, also kann man das lokale Integral noch definieren und durch das gleiche Argument wie vorher zeigen, dass es unabhängig von der Wahl der (mit der Orientierung verträglichen) Parametrisierung ist.

Wir erweitern die Definition auf den Fall $m = 0$ wie folgt. Eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine diskrete Teilmenge, und eine 0-Form ist eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$; hier muss nichts über Stetigkeit oder Differenzierbarkeit gesagt werden, weil M diskret ist. Jeder Punkt in $p \in M$ hat eine Umgebung in $\mathbb{R}^n$, die nur p und keine anderen Punkte aus M enthält. Für eine gegebene Teilmenge $K \subset M$ kann man aus solchen Umgebungen eine offene Überdeckung von K bauen, womit klar wird, dass K genau dann kompakt ist, wenn sie endlich ist. Die Funktion $f \in \Omega^0(M)$ hat also genau dann kompakten Träger, wenn f in höchstens endlich vielen Punkten nichttrivial ist. Aus diesem Grund ist die Summe in der folgenden Definition endlich.

Definition 6.14. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $\sigma : M \to \{1, -1\}$ eine Orientierung von M und $f \in \Omega^0(M)$ eine 0-Form auf M mit kompaktem Träger. Das Integral von f über M ist dann

$$\int_M f := \sum_{p \in M} \sigma(p) f(p).$$

Beispiel 6.15. Sei $M := [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit der kanonischen Orientierung versehen, wie in Beispiel 6.13 erwähnt, also ist die Randorientierung von ∂M durch $\sigma(b) = 1$ und $\sigma(a) = -1$ gegeben. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Wir betrachten die Identitätsabbildung als Koordinate $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ und schreiben das Differential $df \in \Omega^1_0(M)$ auf $M \backslash \partial M$ als $df = f'\, dx$. Da das Bild von ∂M in beliebigen Koordinatensystemem eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist, dürfen wir Satz 3.18 anwenden, um beim Integrieren ∂M wegzulassen und nur die eine Karte $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ zu berücksichtigen: es folgt,

$$\int_M df = \int_{(a,b)} f'(x)\, dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial M} f.$$

In Beispiel 6.15 sieht man den ersten Spezialfall des Satzes von Stokes, der als weitgehende Verallgemeinerung vom Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu betrachten ist. Für die Aussage muss man verstehen, dass jede Differentialform $\omega \in \Omega^q_\ell(M)$ durch Einschränkung auch eine Differentialform auf dem Rand bestimmt; wir werden es weiterhin mit $\omega \in \Omega^q_\ell(\partial M)$ bezeichnen.

Satz 6.16 (Stokes)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte C^2-Untermannigfaltigkeit mit Rand, $m \in \mathbb{N}$, und $\omega \in \Omega^{m-1}_1(M)$ eine stetig differenzierbare $(m-1)$-Form mit kompaktem Träger. Es sei ∂M mit der Randorientierung versehen. Dann gilt:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Bemerkung 6.17. Die Aussage ist auch im Fall $\partial M = \varnothing$ sinnvoll, und ihr Inhalt ist dann $\int_M d\omega = 0$. Man nennt eine Mannigfaltigkeit M **geschlossen**, falls M kompakt ist und $\partial M = \varnothing$.[17] Der Satz von Stokes impliziert also, dass das Integral einer exakten m-Form über einer geschlossenen m-Mannigfaltigkeit immer verschwindet.

Beweis von Satz 6.16. Man kann das Problem wie folgt auf den Spezialfall $M = \mathbb{H}^m$ reduzieren. Per Annahme hat $\omega \in \Omega_1^{m-1}(M)$ kompakten Träger $K \subset M$, und für eine gegebene offene Überdeckung $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ von K kann man eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha : M \to [0,1]\}_{\alpha\in I}$ wählen, so dass

$$\omega = \sum_{\alpha\in I} \omega_\alpha, \qquad \text{für} \qquad \omega_\alpha := \rho_\alpha \omega \in \Omega_1^{m-1}(M),$$

wobei jedes ω_α kompakten Träger in $M \cap \mathcal{U}_\alpha$ hat. Wenn die Gleichung $\int_M d\omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega_\alpha$ für jedes $\alpha \in I$ bewiesen werden kann, dann folgt aus der Linearität der äußeren Ableitung und des Integrals,

$$\int_M d\omega = \int_M d\Big(\sum_{\alpha\in I} \omega_\alpha\Big) = \int_M \sum_{\alpha\in I} d\omega_\alpha = \sum_{\alpha\in I} \int_M d\omega_\alpha = \sum_{\alpha\in I} \int_{\partial M} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \sum_{\alpha\in I} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega.$$

Bei ω_α dürfen wir durch Wahl einer geeigneten Überdeckung annehmen, dass der Träger im Definitionsbereich eines einzelnen Koordinatensystems $M \supset \mathcal{O}_\alpha \xrightarrow{x_\alpha} \mathcal{W}_\alpha \subset \mathbb{H}^m$ enthalten ist, wobei im Fall $m = 1$ beide Varianten $\mathbb{H}^1_\pm$ berücksichtigt werden müssen. Aus Korollar 4.9 folgt nun, dass $\int_M \omega_\alpha$ einfach das Integral der entsprechenden Koordinatendarstellung von ω_α über $\mathbb{H}^m$ bzw. $\mathbb{H}^1_\pm$ ist. Aus diesem Grund lassen wir jetzt α aus der Notation weg und betrachten nur den folgenden Spezialfall: ω ist eine $(m-1)$-Form von der Klasse C^1 auf $\mathbb{H}^m$ (oder $\mathbb{H}^1_\pm$) mit kompaktem Träger. Wir nehmen zuerst $m \geqslant 2$ an, damit zwischen $\mathbb{H}^1_+$ und $\mathbb{H}^1_-$ nicht unterschieden werden muss.

Bzgl. der kartesischen Koordinaten $x_1, \dots, x_m : \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}$ hat ω die Form

$$\omega = \sum_{j=1}^m f_j \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m$$

für C^1-Funktionen $f_j : \mathbb{H}^m \to \mathbb{R}$ mit kompakten Trägern, wobei der Hut auf dx_j signalisieren soll, dass dx_j *nicht* in diesem Dachprodukt erscheint (aber alle dx_i für $i \neq j$ doch). Die 1-Form dx_1 verschwindet auf Tangentialvektoren zum Rand $\partial\mathbb{H}^m$, die eingeschränkte Form $\omega \in \Omega_1^{m-1}(\partial\mathbb{H}^m)$ ist also

$$\omega|_{\partial\mathbb{H}^m} = f_1 \, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m \in \Omega_1^{m-1}(\partial\mathbb{H}^m),$$

wobei $(x_2, \dots, x_m)$ als Koordinatensystem auf $\partial\mathbb{H}^m$ verwendet wird; dies ist nach der in §6.2 gegebenen Definition verträglich mit der Randorientierung von $\partial\mathbb{H}^m$. Die äußere

[17] Zu diesem Punkt hat die deutsche Terminologie einen Vorteil im Vergleich mit dem Englischen: "geschlossene Mannigfaltigkeit" heißt auf Englisch natürlich "closed manifold", aber das gleiche Wort wird im Begriff "closed subset" verwendet, der auf Deutsch nicht "geschlossene" sondern "*ab*geschlossene Teilmenge" heißt. Diese Unterscheidung ist richtig, denn "geschlossene Mannigfaltigkeit" und "abgeschlossene Teilmenge" sind tatsächlich verschiedene Begriffe, die in verschiedenen Kontexten sinnvoll sind. Ich habe sehr oft Verwirrung zu diesem Punkt erlebt bei Studierenden, die entweder nur die englische Terminologie gelernt oder (es passiert nun mal) die deutsche Terminologie vergessen hatten.

Ableitung von ω ist

$$
\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{j=1}^{m} df_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m = \sum_{j=1}^{m} \partial_j f_j \, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_m \\
&= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \partial_j f_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m,
\end{aligned}
$$

also laut Korollar 4.9,

$$
\int_{\mathbb{H}^m} d\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}^m} \partial_j f_j(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 \ldots dx_m.
$$

Für $j \geqslant 2$ zeigt man durch den Satz von Fubini und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass das Integral auf der rechten Seite verschwindet: wählen wir $R > 0$ groß, so dass der Träger von f_j in $[-R, R]^m$ enthalten ist, dann gilt

$$
\int_{\mathbb{H}^m} \partial_j f_j(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 \ldots dx_m = \int_{\mathbb{H}^{m-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_j f_j(x_1, \ldots, x_m) \, dx_j \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_j} \ldots dx_m = 0,
$$

denn nach dem Hauptsatz,

$$
\int_{\mathbb{R}} \partial_j f_j(x_1, \ldots, x_m) \, dx_j = \int_{-R}^{R} \partial_j f_j(x_1, \ldots, x_m) \, dx_j = f(x_1, \ldots, x_m) \Big|_{x_j=-R}^{x_j=R} = 0.
$$

Nur bei $j = 1$ sieht die Lage anders aus, denn

$$
\begin{aligned}
\int_{(-\infty,0]} \partial_1 f_1(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 &= \int_{-R}^{0} \partial_1 f_1(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m) \Big|_{x_1=-R}^{x_1=0} \\
&= f_1(0, x_2, \ldots, x_m),
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{H}^m} \partial_1 f_1(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 \ldots dx_m &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{(-\infty,0]} \partial_1 f_1(x_1, \ldots, x_m) \, dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_m \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(0, x_2, \ldots, x_m) \, dx_2 \ldots dx_m = \int_{\partial \mathbb{H}^m} \omega.
\end{aligned}
$$

Im Fall $m = 1$ muss zwischen einer positiven bzw. negativen Randkarte unterschieden werden. Im positiven Fall ist ω eine Funktion $f : \mathbb{H}^1_- \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, und der Hauptsatz führt zum Resultat

$$
\int_{\mathbb{H}^1_-} df = \int_{-\infty}^{0} f'(x_1) \, dx_1 = f(0) = \int_{\partial \mathbb{H}^1_-} f,
$$

während im negativen Fall,

$$
\int_{\mathbb{H}^1_+} df = \int_{0}^{\infty} f'(x_1) \, dx_1 = -f(0) = \int_{\partial \mathbb{H}^1_+} f.
$$

□

7 Anwendungen in der Vektoranalysis

Ein **Vektorfeld** X auf einer C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $X : M \to \mathbb{R}^n$ mit $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. Bzgl. eines Koordinatensystems $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ hat jedes Vektorfeld eine Koordinatendarstellung der Form

$$X(p) = \sum_{i=1}^{m} X_i(p) e_i(p)$$

auf $\mathcal{O}$, wobei $X_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $e_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ die in §4.4 eingeführten Koordinatenvektorfelder sind. Die Koordinatenvektorfelder sind von der Klasse C^{k-1}, also für $0 \leqslant \ell \leqslant k-1$ ist X von der Klasse C^ℓ genau dann, wenn die Komponentenfunktionen $X_i : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ alle von der Klasse C^ℓ sind. Der Vektorraum aller Vektorfelder auf M von der Klasse C^ℓ wird oft mit

$$\mathfrak{X}^\ell(M), \qquad \text{oder im Fall } k = \infty,\ \mathfrak{X}(M) := \mathfrak{X}^\infty(M)$$

bezeichnet.

Wir können jede offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ als glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit betrachten, mit $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ für alle $p \in \mathcal{U}$, also ist ein Vektorfeld auf $\mathcal{U}$ nichts anderes als eine Funktion $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Die Erforschung von Vektorfeldern, ihren Ableitungen und daraus entstehenden Integralen in diesem Kontext heißt *Vektoranalysis*, und das Gebiet umfasst die klassischen Integralsätze, die in §1 kurz skizziert wurden. Wir wollen jetzt sehen, wie diese Sätze als Korollare der inzwischen bewiesenen Resultate über Differentialformen entstehen.

7.1 Gradient

Wir befassen uns zuerst mit der folgenden Frage: welche Vektorfelder $\mathbf{X} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ können Gradienten von Funktionen sein? Dieses Problem lässt sich in eine Frage über Differentialformen übersetzen, denn

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) = \nabla f \quad \Leftrightarrow \quad df = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n.$$

Die 1-Form auf der rechten Seite lässt sich kürzer mittels der sogenannten **musikalischen Isomorphismen** hinschreiben: mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\flat} \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*, \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^\flat := \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle,$$

oder in anderen Worten, für jeden Vektor $\mathbf{v}$ wird das Funktional $\mathbf{v}^\flat : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\mathbf{v}^\flat(\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ definiert. Die Abbildung $\flat : \mathbb{R}^n \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ ist linear und injektiv; da $\dim \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* = \binom{n}{1} = n = \dim \mathbb{R}^n$, ist sie daher ein Isomorphismus. Die Umkehrabbildung davon wird mit

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* \xrightarrow{\sharp} \mathbb{R}^n, \qquad \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^* \ni \lambda \mapsto \lambda^\sharp \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet. Beide Isomorphismen können auch punktweise zu einer Korrespondenz zwischen Vektorfeldern und 1-Formen auf $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ übertragen werden, z.B.

$$\mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U}) \xrightarrow{\flat} \Omega^1_\ell(\mathcal{U}), \qquad \mathbf{X}^\flat_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{X}(p), \mathbf{w} \rangle \text{ für } p \in \mathcal{U}.$$

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie: für ein Vektorfeld $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \in \mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U})$ auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbf{X}^\flat = X_1\, dx_1 + \ldots + X_n\, dx_n$.

Im Poincaré-Lemma (Satz 5.6) haben wir bewiesen, dass eine geschlossene Differentialform immer *lokal* exakt ist—konkreter hat unser Beweis eigentlich gezeigt, dass eine geschlossene Differentialform auf einem Quader $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ immer exakt ist. Jetzt impliziert das:

Korollar 7.2 (des Poincaré-Lemmas)**.** *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Ist $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ der Gradient einer C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, dann erfüllt die 1-Form $\mathbf{X}^\flat \in \Omega^1_1(\mathcal{U})$*

$$d(\mathbf{X}^\flat) = 0.$$

Umgekehrt gilt: falls $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ und $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ein Vektorfeld ist, das $d(\mathbf{X}^\flat) = 0$ erfüllt, dann existiert eine C^2-Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \mathbf{X}$. □

Bemerkung 7.3. Dass die Funktion $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ im zweiten Teil der Aussage von der Klasse C^2 ist, folgt nicht direkt vom Poincaré-Lemma, ist aber leicht zu sehen, denn $\nabla f = \mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ impliziert dann, dass alle partiellen Ableitungen von f stetig differenzierbar sind.

Bemerkung 7.4. Der zweite Teil der Aussage ist im Allgemeinen falsch für beliebige offene Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, denn nicht jede geschlossene 1-Form auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ist exakt (siehe Beispiel 5.5, und im Kontext von Vektorfeldern, Übungsaufgabe 13.2).

7.2 Rotation

Im Fall $n = 3$ ist eine Übersetzung von Korollar 7.2 möglich, die keine Differentialformen erwähnt.

In §5.2 wurde das *innere Produkt* eines Vektorfeldes X mit einer q-Form ω eingeführt: dies ist eine $(q-1)$-Form $\iota_X\omega$, gegeben durch

$$(\iota_X\omega)_p(Y_1, \ldots, Y_{q-1}) := \omega_p(X(p), Y_1, \ldots, Y_{q-1}) \quad \text{für } p \in M,\ Y_1, \ldots, Y_{q-1} \in T_pM.$$

So definiert das innere Produkt eine bilineare Abbildung

$$\mathfrak{X}^\ell(M) \times \Omega^q_\ell(M) \to \Omega^{q-1}_\ell(M).$$

Auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die glatte n-Form

$$\mu := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

die als **Standardvolumenform** von $\mathbb{R}^n$ bekannt ist, weil $|\mu_p(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|$ immer das Lebesgue-Maß des von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in T_pM$ aufgespannten Parallelepipeds ist. Um das zu sehen, muss man nur die Relation

$$\mu_p(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \tag{24}$$

verifizieren, wobei auf der rechten Seite die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ als Spalten einer n-mal-n Matrix betrachtet werden. Die Relation folgt, weil beide Seiten Elemente des 1-dimensionalen Vektorraums $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ definieren, und beide sind freilich gleich, wenn die Standardbasisvektoren $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ eingesetzt werden.

Für jedes Vektorfeld $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U})$ betrachten wir nun die $(n-1)$-Form $\iota_{\mathbf{X}}\mu \in \Omega^{n-1}_\ell(\mathcal{U})$.

Aufgabe 7.5. Zeigen Sie: für $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U})$ gilt

$$\iota_{\mathbf{X}}\mu = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} X_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei mit $\widehat{dx_j}$ signalisiert wird, dass alle dx_i mit $i \neq j$ im Produkt erscheinen aber dx_j nicht.
Hinweis: für jedes $j = 1, \ldots, n$ gilt $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = (-1)^{j-1} \, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Von der Aufgabe folgt, dass die durch $\mathbf{X} \mapsto \iota_{\mathbf{X}}\mu$ gegebene lineare Abbildung $\mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U}) \to \Omega^{n-1}_\ell(\mathcal{U})$ ein Isomorphismus ist.

Im Fall $n = 3$ mit kartesischen Koordinaten $x, y, z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ können wir jetzt $\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z)$, $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$ und

$$\iota_{\mathbf{X}}\mu = X_x \, dy \wedge dz + X_y \, dz \wedge dx + X_z \, dx \wedge dy$$

schreiben, wobei aus der Formel in Aufgabe 7.5 die Reihenfolge von dx und dz vertauscht wurde, um das Minuszeichen vor X_y zu beseitigen. Für ein zweites Vektorfeld $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z) \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ gilt jetzt $\mathbf{V}^\flat = V_x \, dx + V_y \, dy + V_z \, dz$ und daher,

$$\begin{aligned} d\mathbf{V}^\flat &= dV_x \wedge dx + dV_y \wedge dy + dV_z \wedge dz \\ &= (\partial_y V_x \, dy + \partial_z V_x \, dz) \wedge dx + (\partial_x V_y \, dx + \partial_z V_y \, dz) \wedge dy + (\partial_x V_z \, dx + \partial_y V_z \, dy) \wedge dz \\ &= (\partial_y V_z - \partial_z V_y) \, dy \wedge dz + (\partial_z V_x - \partial_x V_z) \, dz \wedge dx + (\partial_x V_y - \partial_y V_x) \, dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Vergleichen wir das jetzt mit der Definition der *Rotation* eines Vektorfeldes in §1.1, so finden wir die ziemlich kurze Formel

$$d\mathbf{V}^\flat = \iota_{\mathrm{rot}(\mathbf{V})}\mu. \tag{25}$$

Da $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}^\flat$ und $\mathbf{X} \mapsto \iota_{\mathbf{X}}\mu$ Isomorphismen $\mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U}) \to \Omega^1_\ell(\mathcal{U})$ bzw. $\mathfrak{X}^\ell(\mathcal{U}) \to \Omega^2_\ell(\mathcal{U})$ sind, könnte (25) genauso gut als *Definition* der Rotation eines Vektorfeldes verstanden werden. Insbesondere gilt für $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$,

$$d\mathbf{X}^\flat = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rot}(\mathbf{X}) = 0.$$

So sieht die Bedingung bei Korollar 7.2 im Fall $n = 3$ jetzt aus:

Korollar (vgl. Satz 1.5)**.** *Ein C^1-Vektorfeld auf einem Quader in $\mathbb{R}^3$ ist genau dann der Gradient einer Funktion, wenn seine Rotation verschwindet.* □

7.3 Divergenz

Wir haben gesehen, dass der Gradient einer Funktion und Rotation eines Vektorfeldes zum Differential einer Funktion bzw. zur äußeren Ableitung einer 1-Form äquivalent sind. Die Divergenz lässt sich auch als äußere Ableitung interpretieren, wenn man ein Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ mit einer $(n-1)$-Form identifiziert.

Proposition 7.6. *Für $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ gilt*

$$d(\iota_{\mathbf{V}}\mu) = \mathrm{div}(\mathbf{V}) \cdot \mu.$$

Beweis. Mit der Formel aus Aufgabe 7.5 berechnen wir:

$$\begin{aligned} d(\iota_{\mathbf{V}}\mu) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} dV_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\partial_j V_j\, dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}\partial_j V_j\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \operatorname{div}(\mathbf{V}) \cdot \mu. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.7. *Für eine offene Menge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und Vektorfeld $\mathbf{V} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ gilt* $\operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$ *genau dann, wenn die $(n-1)$-Form $\iota_{\mathbf{V}}\mu$ geschlossen ist.* □

Im Fall $n = 3$ kann die Relation $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{V})) = 0$ nun als Übersetzung von $d(d\mathbf{V}^\flat) = 0$ angesehen werden, denn wegen (25) gilt

$$0 = d(d\mathbf{V}^\flat) = d(\iota_{\operatorname{rot}(\mathbf{V})}\mu) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{V})) \cdot \mu.$$

Andererseits ist ein Vektorfeld $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ mit $\operatorname{div}(\mathbf{X}) = 0$ äquivalent zu einer geschlossenen 2-Form $\iota_{\mathbf{X}}\mu \in \Omega^2_1(\mathcal{U})$, die dann wegen des Poincaré-Lemmas lokal exakt ist: konkreter, falls $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ ein Quader ist, dann existiert eine 1-Form $\lambda \in \Omega^1_1(\mathcal{U})$ mit $d\lambda = \iota_{\mathbf{X}}\mu$. Definieren wir ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{V} := \lambda^\sharp$, dann gilt $\lambda = \mathbf{V}^\flat$ und daher

$$d\mathbf{V}^\flat = \iota_{\operatorname{rot}(\mathbf{V})}\mu = \iota_{\mathbf{X}}\mu \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{X}.$$

Korollar (vgl. Satz 1.5)**.** *Ein C^1-Vektorfeld auf einem Quader in $\mathbb{R}^3$ ist genau dann die Rotation eines anderen Vektorfeldes, wenn seine Divergenz verschwindet.* □

7.4 Volumenformen

Wir möchten als Nächstes klären, wie man das m-dimensionale Volumen einer m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ berechnet. Wie oft in der Analysis muss zuerst eine Art Linearisierung dieses Problems gelöst werden: wie berechnet man das m-dimensionale Lebesgue-Maß eines durch m linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds? Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ der m-dimensionale Unterraum, der durch diese Vektoren aufgespannt ist. Die Antwort auf die Frage ändert sich nicht, wenn wir durch Wahl einer orthonormalen Basis V mit $\mathbb{R}^m$ identifizieren, so dass das Skalarprodukt auf V mit dem euklidischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ identifiziert wird. In diesem Kontext kennen wir die Antwort schon: für linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^m$ ist das Lebesgue-Maß des dadurch aufgespannten Parallelepipeds $\left|\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_m\end{pmatrix}\right|$. Da $\dim \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^* = 1$ kann man das auch so formulieren: es gibt genau zwei Elemente $\omega \in \Lambda^m(\mathbb{R}^m)^*$, nämlich $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m) := \pm\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_m\end{pmatrix}$, die die geometrische Bedeutung von Volumen eines Parallelepipeds haben können. Übertragen auf einen beliebigen m-dimensinalen Unterraum in $\mathbb{R}^n$ heißt das:

Lemma 7.8. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in M$ genau zwei Elemente $\omega \in \Lambda^m T_p^*M$, so dass das m-dimensionale Volumen eines durch $X_1, \ldots, X_m \in T_pM$ aufgespannten Parallelepipeds immer durch $|\omega(X_1, \ldots, X_m)|$ gegeben ist.* □

Definition 7.9. Eine stetige m-Form $\omega \in \Omega_0^m(M)$ auf der m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine **Volumenform**, falls für jedes $p \in M$, ω_p eins der zwei in Lemma 7.8 erwähnten Elemente von $\Lambda^m T_p^* M$ ist.[18]

Aufgabe 7.10 (vgl Aufgabe 16.A auf Übungsblatt 16)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, und $V^* := \Lambda^1 V^*$ sein Dualraum. Beweisen Sie:

(a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die multilineare Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{k} \to \Lambda^k V^*, \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_k$$

antisymmetrisch.

(b) Sei $e_1, \ldots, e_n \in V$ eine Basis und $e_1^*, \ldots, e_n^* \in V^*$ ihre Dualbasis. Dann gilt für alle n-Tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V^*$,

$$\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \lambda_1(e_1) & \cdots & \lambda_1(e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n(e_1) & \cdots & \lambda_n(e_n) \end{pmatrix} e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*. \tag{26}$$

Hinweis: Definieren Sie ein Element von $\omega \in \Lambda^n(V^*)^*$ durch $\omega(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \frac{\lambda_1 \wedge \ldots \wedge \lambda_n}{e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*}$.

Jetzt betrachten wir eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand, mit lokalem Koordinatensystem $M \supset \mathcal{O} \xrightarrow{x} \mathcal{W} \subset \mathbb{H}^m$ und entsprechenden Koordinaten $x_1, \ldots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Es seien $f_1, \ldots, f_n : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen.

(c) Zeigen Sie: $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$

Bemerkung: Als wichtiger Spezialfall nimmt man für $f_1, \ldots, f_n$ ein zweites Koordinatensystem $y = (y_1, \ldots, y_n) : \mathcal{O} \to \mathbb{H}^m$. Dann sind beide Seiten in jedem Punkt $p \in \mathcal{O}$ garantiert nichttrivial, und die Matrix wird die Jacobimatrix des Kartenübergangs $y \circ x^{-1}$ im Punkt $x(p) \in \mathcal{W}$. Im Grunde ist dieses Resultat äquivalent zur Berechnung, mit der wir in §3.2 die Koordinateunabhängigkeit des lokalen Integrals gezeigt haben.

Proposition 7.11. *Auf einer orientierten C^k-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ von Dimension $m \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutige Volumenform $\omega \in \Omega_{k-1}^m(M)$ mit der Eigenschaft, dass ω in jedem durch einer orientierten Karte bestimmten lokalen Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_m : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ durch $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ für eine* positive *Funktion $f : \mathcal{O} \to (0, \infty)$ gegeben ist. Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht orientierbar ist, existiert auf M keine Volumenform.*

[18] In der Differentialgeometrie hat das Wort *Volumenform* eine etwas allgemeinere Bedeutung: es darf eine beliebige (stetige oder glatte) m-Form ω mit $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ sein. Der Unterschied liegt daran, dass auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit normalerweise kein Skalarprodukt oder Begriff von Volumen auf Tangentialräumen gegeben ist.

Beweis. Sei $x : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ ein lokales Koordinatensystem auf $\mathcal{O} \subset M$. Da $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ auf $\mathcal{O}$ nirgendwo verschwindet, gibt es wegen Lemma 7.8 genau zwei Volumenformen auf $\mathcal{O}$, wovon einer die Gestalt $f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ für eine positive Funktion $f : \mathcal{O} \to (0, \infty)$ hat, und die Andere $-f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ ist. Die wesentliche Tatsache ist nun Folgendes: ist $y : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ ein zweites Koordinatensystem auf der gleichen Teilmenge $\mathcal{O}$, dann folgt aus Aufgabe 7.10 $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m = g\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ für eine nirgendwo verschwindende Funktion $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$, die aus der Determinante des Kartenübergangs $y \circ x^{-1}$ hergeleitet wird, und genau dann positiv ist, wenn der Kartenübergang orientierungserhaltend ist. Wenn also beide Koordinatensysteme durch orientierte Karten definiert sind, dann existiert auf $\mathcal{O}$ eine eindeutige Volumenform, die als Produkt von *positiven* Funktionen mit sowohl $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ als auch $dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m$ geschrieben werden kann. So kann man eine Volumenform ω auf M definieren, indem man um jeden Punkt $p \in M$ eine orientierte Karte wählt und ω auf dieser Umgebung in Koordinaten hinschreibt. Die resultierende m-Form auf M ist von der Klasse C^{k-1} und hängt von keiner Koordinatenwahl ab, sondern nur von der Orientierung.

Die Korrespondenz geht in beiden Richtungen: falls M eine Volumenform ω hat, dann wird eine eindeutige Orientierung dadurch bestimmt, dass in orientierten Koordinaten immer $\omega = f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ mit $f > 0$ gilt. Falls nämlich um einen gegebenen Punkt $p \in M$ in einem gegebenen Koordinatensystem die Funktion f negativ ist, kann man so wie in Aufgabe 3.17 die Koordinaten ändern, so dass f positiv wird. Es folgt, dass eine Volumenform auf M genau dann existiert, wenn M orientierbar ist. □

Definition 7.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale orientierte C^k-Untermannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m_{k-1}(M)$ die durch die Orientierung bestimmte Volumenform. Wir bezeichnen mit vol_m das Maß auf M, das für Borelmengen $E \subset M$ durch

$$\mathrm{vol}_m(E) := \int_E \omega$$

definiert wird.

Diese Definition ist natürlich ein bisschen faul, denn wir haben weder die Definition des Integrals $\int_E \omega$ über einer beliebigen Borelmenge $E \subset M$ erklärt noch bewiesen, dass vol_m die Bedingungen eines Maßes erfüllt. Das werden wir hier auch nicht tun, denn zum Begreifen der klassischen Integralsätze ist es nicht unbedingt notwendig, aber der wichtigste Spezialfall sollte sofort klar sein: wenn M kompakt ist, können wir ihr Volumen jetzt durch

$$\mathrm{vol}_m(M) = \int_M \omega$$

berechnen. Das Volumen hängt auch nicht von der Orientierung ab: wie in Aufgabe 3.17 kann man eine Orientierung immer umkehren, aber dann wird ω mit $-\omega$ ersetzt, und das Integral ändert sich insgesamt nicht.

Bemerkung 7.13. Sie fragen sich jetzt vielleicht, ob man nicht auch das Volumen einer nichtorientierbaren Untermannigfaltigkeit berechnen kann. Das kann man, aber nicht durch Integration einer Differentialform (was immer von einer Orientierung abhängt), sondern durch Integration eines sogenannten *Volumenelements*. Wir haben in §3 gesehen, dass $\int_M |\omega| \in [0, \infty)$ auch im Fall einer nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit definiert werden kann. Analog kann man ein Volumenelement als nichtnegative Variante des Begriffs Differentialform definieren, ohne zwischen den zwei (sich durch ein Vorzeichen unterscheidenden) Möglichkeiten in Lemma 7.8 unterscheiden zu müssen.

Im Fall einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ von Dimension $m = n-1$ kann eine Volumenform auch etwas direkter konstruiert werden. Ein **Normalenvektorfeld** für eine solche Mannigfaltigkeit ist eine stetige Funktion $\boldsymbol{\nu} : M \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass $\boldsymbol{\nu}(p)$ für jedes $p \in M$ ein Einheitsvektor orthogonal zu T_pM ist.

Proposition 7.14. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit und $\boldsymbol{\nu} : M \to \mathbb{R}^n$ ein Normalenvektorfeld für M. Dann ist*

$$\omega := \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mu \in \Omega^{n-1}_{k-1}(M)$$

eine Volumenform auf M, wobei $\mu := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Beweis. Für einen gegebenen Punkt $p \in M$ wählen wir eine orthonormale Basis $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ von T_pM, also hat das durch $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ aufgespannte Parallelepiped $(n-1)$-dimensionales Volumen 1, und $\boldsymbol{\nu}(p), Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ ist ebenfalls eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^n$. Es folgt wegen (24),

$$\omega(Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = \mu(\boldsymbol{\nu}(p), Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nu}(p) & Y_1 & \ldots Y_{n-1}\end{pmatrix} = \pm 1,$$

denn die Matrix ist orthogonal. □

Bemerkung 7.15. Aus Proposition 7.14 folgt: jede $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, die ein Normalenvektorfeld zulässt, ist orientierbar. Das geht umgekehrt auch: so kann man z.B. sehen, dass das Möbiusband (s. Beispiel 3.10) nicht orientierbar ist.

7.5 Beweise der klassischen Integralsätze

Die folgende Aufgabe dient als Vorbereitung auf einige Orientierungsfragen, die in den Beweisen der klassischen Integralsätzen auftreten.

Aufgabe 7.16 (vgl. Aufgabe 16.B auf Übungsblatt 16)**.** Es seien $m \in \mathbb{N}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierte m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $\omega \in \Omega^m_0(M)$ die von der Orientierung bestimmte Volumenform. Auf $\mathbb{R}^n$ selbst wählen wir die *kanonische* Orientierung, für die die Identitätsabbildung $(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine orientierte Karte ist, und bezeichnen mit

$$\mu := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Standardvolumenform auf $\mathbb{R}^n$. Für einen Punkt $p \in M$ und eine Basis $X_1, \ldots X_m \in T_pM$ gilt immer $\omega(X_1, \ldots, X_m) \neq 0$; wir nennen diese Basis **positiv** bzw. **negativ orientiert**, falls $\omega(X_1, \ldots, X_m)$ positiv bzw. negativ ist. Wichtig zu beachten ist, dass diese Definition von der Reihenfolge der Basisvektoren abhängt, z.B. wenn $X_1, \ldots, X_m$ eine positiv orientierte Basis ist, dann ist $X_2, X_1, X_3, \ldots, X_m$ eine negativ orientierte Basis. Beweisen Sie:

(a) Im Fall $m \geqslant 2$ betrachten wir ∂M mit der Randorientierung. Es sei $\nu \in T_pM \backslash T_p(\partial M)$ ein auswärts gerichteter Tangentialvektor in einem Punkt $p \in \partial M$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{m-1}$ von $T_p(\partial M)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu, X_1, \ldots, X_{m-1}$ eine positiv orientierte Basis von T_pM ist.

(b) Wir betrachten den Fall $m := n-1$ und $\omega = \iota_\nu\mu$ für ein Normalenvektorfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^n$. Eine Basis $X_1, \ldots, X_{n-1}$ von T_pM ist genau dann positiv orientiert, wenn $\nu(p), X_1, \ldots, X_{n-1}$ eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Im Fall $n = 3$ mit $M := \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge ist für jeden Punkt $p \in \mathcal{U}$ und zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$ das Tripel $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ immer eine positiv orientierte Basis von $T_p\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$.
Hinweis: Das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$ kann durch die Relation $\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat = \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu$ charakterisiert werden.

Hier nochmal die zwei Integralsätze aus §1.1.

Satz 7.17 (Divergenzsatz von Gauß-Ostrogradski)**.** *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$, $\Omega \subset \mathcal{U}$ eine n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $\boldsymbol{\nu} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Normalenvektorfeld für $\partial\Omega$, so dass $\boldsymbol{\nu}(p)$ für jedes $p \in \partial\Omega$ auswärts gerichtet ist. Dann gilt:*

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{X}\ d\mathrm{vol}_n = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle\, d\mathrm{vol}_{n-1}.$$

Beweis. Die linke Seite ist das Integral der n-Form $d(\iota_{\mathbf{X}}\mu)$, also laut dem Satz von Stokes ist es auch $\int_{\partial\Omega} \iota_{\mathbf{X}}\mu$, wobei $\partial\Omega$ mit der Randorientierung versehen ist. Für diese Orientierung folgt aus Aufgabe 7.16(a) und (b), dass $\iota_{\boldsymbol{\nu}}\mu$ die dazu gehörende Volumenform ist, und das Integral auf der rechten Seite wird dann $\int_{\partial\Omega}\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle\, \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mu$. Der Satz folgt dann aus der folgenden Behauptung:

$$\langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle\, \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mu = \iota_{\mathbf{X}}\mu \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Da $\dim \Lambda^{n-1}T_p^*(\partial\Omega) = 1$ reicht es, beide Seiten auf einer beliebigen Basis $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in T_p(\partial\Omega)$ für beliebige Punkte $p \in \partial\Omega$ auszuwerten. Falls $\mathbf{X}(p) = c\boldsymbol{\nu}(p)$ für ein $c \in \mathbb{R}$ ist die Behauptung sowieso klar. Falls nicht, dann gilt

$$\mathbf{X}(p) = \langle \mathbf{X}(p), \boldsymbol{\nu}(p)\rangle \boldsymbol{\nu}(p) + Y_1$$

für einen nichttrivialen Vektor $Y_1 \in T_p(\partial\Omega)$, die wir als erster Vektor in der Basis $Y_1, \dots, Y_{n-1} \in T_p(\partial\Omega)$ nehmen dürfen. Wegen Multilinearität und Antisymmetrie folgt:

$$\begin{aligned}(\iota_{\mathbf{X}}\mu)_p(Y_1, \dots, Y_{n-1}) &= \mu_p(\mathbf{X}(p), Y_1, \dots, Y_{n-1}) = \mu_p(\langle \mathbf{X}(p), \boldsymbol{\nu}(p)\rangle \boldsymbol{\nu}(p) + Y_1, Y_1, \dots, Y_{n-1}) \\ &= \langle \mathbf{X}(p), \boldsymbol{\nu}(p)\rangle \mu_p(\boldsymbol{\nu}(p), Y_1, \dots, Y_{n-1}) = \langle \mathbf{X}(p), \boldsymbol{\nu}(p)\rangle \iota_{\boldsymbol{\nu}}\mu(Y_1, \dots, Y_{n-1}),\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Satz 7.18 (Integralsatz von Stokes)**.** *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$, $\Sigma \subset \mathcal{U}$ eine kompakte 2-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $\boldsymbol{\nu} : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ ein Normalenvektorfeld für Σ. Wir bezeichnen mit $\mathbf{t} \in \mathfrak{X}^2(\partial\Sigma)$ das eindeutige Vektorfeld auf $\partial\Sigma$, so dass $\|\mathbf{t}(p)\| = 1$ und $\mathbf{t}(p) \times \boldsymbol{\nu}(p)$ in Richtung auswärts bzgl. Σ für jedes $p \in \partial\Sigma$ deutet. Dann gilt:*

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle\ d\mathrm{vol}_2 = \int_{\partial\Sigma} \langle \mathbf{X}, \mathbf{t}\rangle\, d\mathrm{vol}_1.$$

Beweis. Nach dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 7.17 kann die linke Seite als $\int_\Sigma \iota_{\operatorname{rot}(\mathbf{X})}\mu$ geschrieben werden, wobei Σ mit der durch das Normalenvektorfeld $\boldsymbol{\nu}$ bestimmten Orientierung versehen ist. Da $\iota_{\operatorname{rot}(\mathbf{X})}\mu = d\mathbf{X}^\flat$ können wir dann den allgemeinen Satz von Stokes anwenden,

$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{X}, \boldsymbol{\nu}\rangle\ d\mathrm{vol}_2 = \int_\Sigma d\mathbf{X}^\flat = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{X}^\flat,$$

und es bleibt noch zu zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite auch $\int_{\partial\Sigma}\langle \mathbf{X}, \mathbf{t}\rangle\, d\mathrm{vol}_1$ ist. Letzteres ist per Definition $\int_{\partial\Sigma}\langle \mathbf{X}, \mathbf{t}\rangle\,\omega$, wenn $\omega \in \Omega^1_1(\partial\Sigma)$ die durch die Randorientierung bestimmte Volumenform ist. Da $\|\mathbf{t}(p)\| = 1$ für jedes $p \in \partial\Sigma$ gilt $\omega_p(\mathbf{t}(p)) = \pm 1$.

Wir behaupten: das Vorzeichen ist hier positiv, oder in der Sprache von Aufgabe 7.16 ausgedrückt, $\mathbf{t}(p)$ ist eine positiv orientierte Basis von $T_p(\partial\Sigma)$. Laut Aufgabe 7.16(c) ist $\mathbf{t}(p), \boldsymbol{\nu}(p), \mathbf{t}(p)\times\boldsymbol{\nu}(p)$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$; nach einer geraden Permutation wird dies $\boldsymbol{\nu}(p), \mathbf{t}(p)\times\boldsymbol{\nu}(p), \mathbf{t}(p)$, die also auch eine positiv orientierte Basis ist. Dann folgt aus Aufgabe 7.16(b), dass $\mathbf{t}(p)\times\boldsymbol{\nu}(p), \mathbf{t}(p)$ eine positiv orientierte Basis von $T_p\Sigma$ ist, und weil $\mathbf{t}(p)\times\boldsymbol{\nu}(p)$ aus Σ nach außen deutet, impliziert dann Aufgabe 7.16(a), dass $\mathbf{t}(p)$ eine positiv orientierte Basis von $T_p(\partial\Sigma)$ ist.

Jetzt folgt
$$\mathbf{X}^\flat_p(\mathbf{t}(p)) = \langle \mathbf{X}(p), \mathbf{t}(p)\rangle = \langle \mathbf{X}(p), \mathbf{t}(p)\rangle\omega(\mathbf{t}(p)).$$

Da $\dim \Lambda^1 T^*_p(\partial\Sigma) = 1$ folgt davon, dass die 1-Formen $\mathbf{X}^\flat$ und $\langle \mathbf{X}, \mathbf{t}\rangle\omega$ auf $\partial\Sigma$ gleich sind. □

Bemerkung 7.19. Sätze 7.17 und 7.18 lassen sich auch ohne große Anstrengungen verallgemeinern, indem man die Ränder $\partial\Omega$ bzw. $\partial\Sigma$ erlaubt, keine C^2-Untermannigfaltikeiten sondern nur *stückweise* von der Klasse C^2 zu sein. Ein einfaches Beispiel wäre, dass man für Ω in Satz 7.17 eine Produktmenge wie $B^k_r \times B^\ell_R \subset \mathbb{R}^n$ mit $k + \ell = n$ nimmt, wobei B^n_r die abgeschlossene Kugel von Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Der Rand dieser Menge ist $(\partial B^k_r \times B^\ell_R) \cup (B^k_r \times \partial B^\ell_R)$, der im Komplement von $\partial B^k_r \times \partial B^\ell_R$ eine glatte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist, aber eine "Ecke" in der Teilmenge $\partial B^k_r \times \partial B^\ell_R$ hat. Hauptsache, diese Ecke ist auch eine Nullmenge und kann zum Zweck von Integration deswegen ignoriert werden. Man kann in der Praxis solche Verallgemeinerungen von Satz 7.17 beweisen, indem man Ω mit anderen Mengen Ω_ϵ approximiert, für die der Rand $\partial\Omega_\epsilon$ glatt ist—ebenfalls Satz 7.18.

Literatur

[AF10] I. Agricola and T. Friedrich, *Vektoranalysis*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik.

[Bau12] H. Baum, *Grundkurs Analysis* (2012). Skript zur Vorlesung Analysis I–III, verfügbar unter `http://www.math.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2019/Analysis2/Baum_Analysis-BA-WS11-Summe.pdf`.

[Sal16] D. A. Salamon, *Measure and integration*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016.