Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
C. Wendl

Analysis III
WiSe 2019–20

Parameterabhängige Lebesgue-Integrale

Mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz als Hilfsmittel können die Resultate über parameterabhängige Integrale aus der Vorlesung Analysis II wesentlich verallgemeinert und gleichzeitig vereinfacht werden.

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und M ein metrischer Raum.[1] Für eine gegebene Funktion $f : X \times M \to \mathbb{R}$ bestimmt jeder Punkt $x \in M$ eine Funktion

$$f(\cdot, x) : X \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto f(t, x).$$

Ist diese Funktion für jedes $x \in M$ entweder messbar und nichtnegativ oder μ-integrierbar, so können wir eine Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_X f(\cdot, x)\, d\mu \tag{1}$$

definieren. Wir möchten jetzt sehen, unter welchen Voraussetzungen diese Funktion stetig bzw. differenzierbar ist; im Fall $M := \mathcal{U}$ eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ würden wir insb. hoffen, eine Formel der Form

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu \tag{2}$$

beweisen zu können. Hier werden die partiellen Ableitungen von $f(t, \mathbf{x})$ nach den Variablen $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ natürlich durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(t, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(t, \mathbf{x})}{h}$$

definiert, wobei $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet; wir bemerken, dass dies wohl definiert ist, auch wenn es bzgl. der Variablen $t \in X$ keinen Differenzierbarkeitsbegriff gibt (X ist in dieser Diskussion ein allgemeiner Maßraum, nicht unbedingt eine Teilmenge eines Vektorraums).

In Analysis II haben wir ein ähnliches Problem mit dem Riemann-Integral betrachtet und gesehen: ist X ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, M eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und die Funktion $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist F auch stetig, und (2) gilt auch wenn die partiellen Ableitungen von $f(t, x_1, \dots, x_n)$ nach $x_1, \dots, x_n$ existieren und stetig sind. Wir haben auch gesehen, dass die Sache wesentlich schwieriger wird, wenn X kein kompaktes sondern ein offenes Intervall ist und die Integrale als *uneigentliche* Riemann-Integrale zu interpretieren sind (s. [Wen19b]). Gerade an dieser Stelle hat das Lebesgue-Integral wesentliche Vorteile, denn bei Lebesgue-integrierbaren Funktionen wird das Integral auch auf unbeschränkten Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ direkt definiert; man braucht keinen Limes von Integralen auf kleineren kompakten Teilmengen. In der folgenden Aussage ist die Stetigkeit von f als Funktion

[1]Eigentlich könnte man den ersten Teil von Satz 1 auch allgemeiner formulieren und M erlauben, ein beliebiger topologischer Raum mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom zu sein. Die Metrik wird im Beweis nie erwähnt, aber die Begriffe von offenen Umgebungen und Konvergenz von Folgen müssen klar definiert sein, und dazu braucht man die Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit (wofür das erste Abzählbarkeitsaxiom nötig ist).

auf X außerdem gar nicht nötig (und im Allgemeinen nicht wohl definiert). Stattdessen braucht man die μ-Integrierbarkeit von $f(\cdot, x)$, aber man braucht ein bisschen mehr: die Funktionen $f(\cdot, x)$ sollen nicht nur für alle $x \in M$ einzeln μ-integrierbar sein, sondern, es muss eine Art "lokal gleichmäßige" Integrierbarkeit geben, die in der Voraussetzung 2(b) unten formuliert ist. Dies wird die Anwendung des Lebesgueschen Konvergenzsatzes ermöglichen.

Satz 1. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, M ein metrischer Raum und $f : X \times M \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$f(\cdot, x) : X \to \mathbb{R}$ ist für jedes $x \in M$ messbar;*
2. *Zu jedem Punkt $x \in M$ existiert eine Nullmenge $N_x \subset X$, eine Umgebung $\mathcal{V}_x \subset M$ von x und eine μ-integrierbare Funktion $g_x : X \to [0, \infty]$, so dass die Bedingungen*
   (a) $\mathcal{V}_x \to \mathbb{R} : y \mapsto f(t, y)$ ist stetig für alle $t \in X \setminus N_x$;
   (b) $|f(t, y)| \le g_x(t)$ für alle $t \in X \setminus N_x$ und $y \in \mathcal{V}_x$

   erfüllt werden.

Dann existiert eine stetige Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_X f(\cdot, x)\, d\mu.$$

Des Weiteren gilt Folgendes im Spezialfall mit M eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$: existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ für fast alle t und erfüllt diese Funktion auch die Bedingungen 2(a) und 2(b) oben, dann existiert auch eine stetige partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_j} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, und sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu. \tag{3}$$

Bemerkung 2. In (3) ist der Integrand $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x}) : X \setminus N \to \mathbb{R}$ auf dem Komplement einer Nullmenge $N \subset X$ definiert. Implizit in dieser Aussage ist, dass $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ eine Erweiterung als messbare Funktion $X \to \mathbb{R}$ zulässt, damit das Integral in (3) wohl definiert ist. Das muss nicht extra angenommen werden, denn wir werden im Beweis sehen, dass es von den genannten Voraussetzungen folgt.

Bemerkung 3. In den meisten Anwendungen dieses Satzes darf die Nullmenge N_x ignoriert werden, d.h. $N_x = \emptyset$. Was meistens nicht ignoriert werden kann, ist dass Bedingung 2(b) nur *lokal* erfüllt wird, d.h. man kann oft keine einzelne Funktion $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ finden, die $|f(\cdot, y)| \le g$ für alle $y \in M$ erfüllt, aber der Satz kann trotzdem angewendet werden, wenn jedes $x \in M$ eine Umgebung hat, für die eine solche Funktion existiert.

Beweis von Satz 1. Für die Stetigkeit von $F : M \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in M$ betrachten wir eine beliebige konvergente Folge $x_n \in M$ mit $x_n \to x$. Weil $f(t, \cdot)|_{\mathcal{V}_x} : \mathcal{V}_x \to \mathbb{R}$ für alle $t \in X \setminus N_x$ stetig ist, konvergiert die Funktionenfolge $f(\cdot, x_n) : X \to \mathbb{R}$ punktweise auf $X \setminus N_x$ gegen $f(\cdot, x) : X \to \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß liegt x_n außerdem in der Umgebung $\mathcal{V}_x$, also gilt

$$|f(\cdot, x_n)| \le g_x \quad \text{auf } X \setminus N_x.$$

Dann folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz,

$$F(x_n) = \int_X f(\cdot, x_n)\, d\mu = \int_{X\setminus N_x} f(\cdot, x_n)\, d\mu \to \int_{X\setminus N_x} f(\cdot, x)\, d\mu = \int_X f(\cdot, x)\, d\mu = F(x).$$

Jetzt nehmen wir dazu an, $M = \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und, für einen gegebenen Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, die Funktion $\mathcal{V}_\mathbf{x} \to \mathbb{R} : \mathbf{y} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{y})$ sei für alle $t \in X \setminus N_\mathbf{x}$ wohl definiert und stetig, wobei $N_\mathbf{x} \subset X$ wieder eine Nullmenge und $\mathcal{V}_\mathbf{x} \subset \mathcal{U}$ eine Umgebung von $\mathbf{x}$ ist. Diese partielle Ableitung ist der Limes bei $h \to 0$ von den Differenzquotienten

$$D_j^h f(t, \mathbf{y}) := \frac{f(t, \mathbf{y} + h\mathbf{e}_j) - f(t, \mathbf{y})}{h} \in \mathbb{R};$$

konkret heißt das, für jedes $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_\mathbf{x}$ ist die Funktion $D_j^h f(\cdot, \mathbf{y}) : X \to \mathbb{R}$ für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hinreichend nahe an 0 definiert, und für jede Folge $h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h_n \to 0$ gilt

$$D_j^{h_n} f(\cdot, \mathbf{y}) \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{y}) \quad \text{punktweise auf } X \setminus N_\mathbf{x}. \tag{4}$$

Dann ist $\chi_{X\setminus N_\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{y})$ punktweise der Limes der Folge messbarer Funktionen $\chi_{X\setminus N_\mathbf{x}} \cdot D_j^{h_n}(\cdot, \mathbf{y})$, und ist daher für jedes $\mathbf{y} \in \mathcal{V}_\mathbf{x}$ messbar.

Für $t \in X \setminus N_\mathbf{x}$ und $h \in \mathbb{R}$ hinreichend nahe an 0 folgt nun aus dem Mittelwertsatz in Integralform (s. [Wen19a]),

$$f(t, \mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) = f(t, \mathbf{x}) + h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + sh\mathbf{e}_j)\, ds, \tag{5}$$

wobei das Integral als Riemann- oder Lebesgue-Integral interpretiert werden darf; beide sind gleich, denn der Integrand ist stetig. Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ auch die Bedingung 2(b) erfüllt, dann existiert eine μ-integrierbare Funktion $g_\mathbf{x} : X \to [0, \infty]$, so dass die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{y}) \right| \le g_\mathbf{x}(t) \quad \text{für alle } t \in X \setminus N_\mathbf{x} \text{ und alle } \mathbf{y} \in \mathcal{V}_x$$

erfüllt wird. Das gilt insb. mit $\mathbf{y} = \mathbf{x} + sh\mathbf{e}_j$ für alle $s \in [0, 1]$, wenn $|h|$ hinreichend klein ist, also folgt in diesem Fall aus (5),

$$\begin{aligned} \left| D_j^h f(t, \mathbf{x}) \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + sh\mathbf{e}_j)\, ds \right| \le \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + sh\mathbf{e}_j) \right| ds \\ &\le \int_0^1 g_\mathbf{x}(t)\, ds = g_\mathbf{x}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Für die Folge $h_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $h_n \to 0$ gilt daher

$$\left| D_j^{h_n} f(\cdot, \mathbf{x}) \right| \le g_\mathbf{x} \in \mathscr{L}^1(\mu) \quad \text{auf } X \setminus N_\mathbf{x} \tag{7}$$

für alle n hinreichend groß. Nun betrachten wir die entsprechenden Differenzquotienten von F,

$$D_j^h F(\mathbf{x}) := \frac{F(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - F(\mathbf{x})}{h} = \int_X D_j^h f(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu,$$

definiert für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ und alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in einer (von $\mathbf{x}$ abhängigen) hinreichend kleinen Umgebung von 0. Der Lebesguesche Konvergenzsatz impliziert angesichts (4) und (7),

$$D_j^{h_n} F(\mathbf{x}) = \int_X D_j^{h_n} f(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu = \int_{X \setminus N_{\mathbf{x}}} D_j^{h_n} f(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu \to \int_{X \setminus N_{\mathbf{x}}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu.$$

Da dies für beliebige Folgen $h_n \to 0$ gilt, haben wir die Folgerung

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} D_j^h F(\mathbf{x}) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x_j}(\cdot, \mathbf{x})\, d\mu.$$

Die Stetigkeit von $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ folgt nun aus dem gleichen Argument wie im ersten Teil. $\square$

Bemerkung 4. Satz 1 behebt das Problem mit Bröckers Beweis [Brö92, §1.2] der Existenz und Stetigkeit der lokalen Flussabbildung für eine Differentialgleichung; s. [Wen19c, Bemerkung 3.4]. Die Voraussetzungen für den ersten Teil des Satzes gelten nämlich immer, wenn X ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : X \times M \to \mathbb{R}$ stetig ist, und zwar:[2]

Proposition 5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und d eine Metrik auf X, so dass der metrische Raum (X, d) kompakt ist. Sei M dazu ein zweiter metrischer Raum und $f : X \times M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung $\mathcal{V}_x \subset M$ von x und eine μ-integrierbare Funktion $g_x : X \to [0, \infty)$, so dass*

$$|f(t, y)| \le g_x(t) \quad \text{für alle} \quad (t, y) \in X \times \mathcal{V}_x.$$

Beweis. Wegen $\mu(X) < \infty$ ist jede konstante Funktion auf X μ-integrierbar, also reicht es, eine Umgebung $\mathcal{V}_x \subset M$ von x zu finden, so dass $|f|$ auf $X \times \mathcal{V}_x$ beschränkt ist. Wenn keine Umgebung dieser Art existiert, dann gibt es eine Folge $(t_n, x_n) \in X \times M$ mit $x_n \to x$, so dass $|f(t_n, x_n)| \to \infty$. Aber X ist kompakt, also kann diese Folge mit einer Teilfolge ersetzt werden, damit t_n auch gegen ein Element $t \in X$ konvergiert. Dann müsste wegen Stetigkeit $f(t_n, x_n)$ gegen $f(t, x)$ konvergieren, was ein Widerspruch ist, weil $f(t_n, x_n)$ unbeschränkt ist. $\square$

Literatur

[Brö92] T. Bröcker, *Analysis. III*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.

[Wen19a] C. Wendl, *Der Mittelwertsatz und die Taylorformel mit Integralrestglied* (2019). Skript zur Vorlesung Analysis II an der HU Berlin, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2019/Analysis2/TaylorIntegral.pdf`.

[Wen19b] ———, *Parameterabhängige uneigentliche Integrale* (2019). Skript zur Vorlesung Analysis II an der HU Berlin, verfügbar unter `https://www.math.hu-berlin.de/~wendl/Sommer2019/Analysis2/DiffUnderInt.pdf`.

[Wen19c] ———, *Existenz-, Eindeutigkeits- und Abhängigkeitsätze für gewöhnliche Differentialgleichungen* (2019). Skript zur Vorlesung Analysis III an der HU Berlin, verfügbar unter `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2019/Analysis3/Skript_ODE.pdf`.

[2]Proposition 5 wurde nicht in der Vorlesung besprochen.