

Inhaltsbeschreibung

Allgemeine Informationen

Lehrpersonen: Prof. Chris Wendl (Vorlesung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.301
wendl@math.hu-berlin.de
Sprechstunde: Dienstags 14:00–15:00 per Zoom
(siehe www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/index.html#Sprechstunde)

Dr. Shubham Dwivedi (Übung)
HU Institut für Mathematik (Rudower Chaussee 25), Raum 1.310
dwivedis@math.hu-berlin.de

Website: www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/Winter2020/FunkAna/

Moodle: moodle.hu-berlin.de/enrol/index.php?id=99581

Vorlesung: Dienstags 15:15–16:45
Donnerstags 13:15–14:45

Übung: Donnerstags 15:15–16:45

Die Lehrveranstaltung findet online per Zoom statt. Zugangsdaten für die Zoom-Meetings werden kurz vor Semesterbeginn im Moodle-Kurs bekanntgegeben.

Sprache: Diese Lehrveranstaltung ist als *BMS Basic Course* aufgeführt und wird daher auf Englisch angeboten, es sei denn, alle Teilnehmer möchten sie auf Deutsch hören. Dies wird in der ersten Vorlesung entschieden. Falls Sie die Vorlesung unbedingt auf Englisch hören möchten aber am ersten Tag nicht pünktlich da sein können, bitte kontaktieren Sie den Dozenten im Voraus.

Voraussetzungen: Der Kurs basiert auf den HU-Vorlesungen *Analysis I–III* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I–II*, sowie auf dem analytischen Teil der Vorlesung *Algebra und Funktionentheorie*.

Die Studierenden sollten vor allem mit den Grundsätzen der Maßtheorie (einschließlich des Satzes von Fubini und der Vollständigkeit der L^p -Räume) vertraut sein.

Kurze Beschreibung

Der Kurs behandelt die *lineare* Funktionalanalysis, die sich als die Erforschung stetiger linearer Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen topologischen Vektorräumen (vor allem Banach- bzw. Hilberträumen) versteht. Die wichtigsten Beispiele solcher unendlich-dimensionaler Vektorräume sind Funktionenräume, die in Anwendungen sehr oft z.B. als Lösungsräume partieller Differentialgleichungen auftauchen. Der Stoff dieser Vorlesung soll also als wesentliche Vorbereitung auf alle weiteren Vorlesungen (sowohl in der Analysis und der angewandten Mathematik als auch in der Differentialgeometrie und der mathematischen Physik) betrachtet werden, die sich mit dem Thema partielle Differentialgleichungen befassen.

Programm

Der Kurs ist in drei Teile untergliedert:

- I. **Grundlegende Begriffe** (Wochen 1–3)
- II. **Reelle Analysis und L^p -Räume** (Wochen 4–9)
- III. **Abstrakte Funktionalanalysis** (Wochen 10–15)

Der folgende Wochenplan ist vorläufig und Änderungen vorbehalten.

1. Grundlegende Begriffe der mengentheoretischen Topologie, topologische Vektorräume, lokal konvexe Vektorräume, Fréchet-, Banach- und Hilberträume, Beispiele
2. Stetige/beschränkte lineare Operatoren zwischen Banachräumen, die Operatornorm, Dualräume, das Lemma von Zorn, Hamel-Basen
3. Grundlegende Resultate über Hilberträume: uniforme Konvexität, Rieszscher Darstellungssatz, orthogonale Basen, orthogonale Projektionen
4. Eigenschaften der L^p -Räume auf \mathbb{R}^n : Dualität von L^p und L^q für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Separabilität von L^p , schwache Konvergenz, der Satz von Banach-Alaoglu
5. Faltung und die Youngsche Ungleichung, Approximation durch glatte Funktionen, absolute Stetigkeit, der Satz von Radon-Nikodym, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
6. Periodische Funktionen und Fourierreihen auf $L^2(\mathbb{T}^n)$
7. Die Fouriertransformation auf dem Schwartz-Raum und $L^2(\mathbb{R}^n)$
8. Die Sobolevräume $H^k(\mathbb{R}^n)$ und $H^k(\mathbb{T}^n)$
9. Distributionen (verallgemeinerte Funktionen)
10. Die Sätze von Baire und Hahn-Banach
11. Der Satz von der offenen Abbildung, abgeschlossene Unterräume mit abgeschlossenen Komplementen
12. Kompakte Operatoren und Fredholm-Operatoren
13. Das Spektrum eines stetigen linearen Operators auf einem Hilbertraum, Polarzerlegung
14. Spektraltheorie beschränkter Operatoren
15. Unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und Spektraltheorie

Literatur

Für den zweiten Teil der Vorlesung (reelle Analysis) gibt es ein Skript in englischer Sprache, das zeitnah auf der Website veröffentlicht wird. Ansonsten folgt der Kurs keinem einzelnen Buch, aber die folgenden Lehrbücher zum Thema sind herzlich empfohlen, vor allem das Buch von Reed und Simon.

- Reed und Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I, Functional Analysis*, revised and enlarged edition, Elsevier 2011
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)
- Bühler und Salamon, *Functional Analysis*, AMS 2018
(Preprint-Version gratis auf Salamons Homepage:
<https://people.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/funcana-ams.pdf>)
- Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer 1985
(Online-Zugriff durch die Universitätsbibliothek der HU)

Prüfung und Hausaufgaben

Noten für das Modul werden durch eine 3-stündige **schriftliche Klausur** kurz nach Semesterende (mit Nachholtermin kurz vor Beginn des nächsten Semesters) bestimmt. Die Klausur wird in elektronischer Form als “Take-Home” durchgeführt, wobei beliebige Hilfsmittel (Bücher, Notizen) verwendet werden dürfen, aber Kommunikation zwischen Teilnehmern nicht zugelassen ist. Die Klausuraufgaben werden so konzipiert, dass sie in weniger als 2 Stunden lösbar sein sollen; das heißt, Zeitdruck soll nicht der entscheidende Faktor sein.

Übungsblätter werden wöchentlich Donnerstags auf der Website veröffentlicht, mit Abgabetermin vor der Übung am folgenden Donnerstag (Lösungen werden in der Übung besprochen).

Mitten im Semester wird es auch eine besondere Hausarbeit geben, die sogenannte “**take-home midterm**”. Diese hat die Form eines Übungsblatts, das innerhalb von zwei Wochen erarbeitet und abgegeben werden kann und dann bewertet wird.

Die Abgabe der Hausaufgaben und des Midterms ist freiwillig, aber je nach erreichter Gesamtpunktzahl kann die Prüfungsnote nach der folgenden Regel verbessert werden:

- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **oder** Midterm $\geq 75\%$ \Rightarrow 2,0 \rightsquigarrow 1,7 oder 1,7 \rightsquigarrow 1,3 usw.
- Hausaufgaben $\geq 50\%$ **und** Midterm $\geq 75\%$ \Rightarrow 2,0 \rightsquigarrow 1,3 oder 1,7 \rightsquigarrow 1,0 usw.