

Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 1

AUFGABE 1: Sei E/K eine Körpererweiterung derart, dass $[E : K]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie: Für alle $\alpha \in E$ mit $\alpha \notin K$ gilt $K(\alpha) = E$.

AUFGABE 2: Sei E/K eine Körpererweiterung, es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K . Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

- (i) $[E : K] = 2$.
- (ii) Es existiert ein $\beta \in E$ mit $\beta \notin K$ und $\beta^2 \in K$, so dass $E = K(\beta)$.

AUFGABE 3: Sei E/K eine Körpererweiterung, es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K . Seien $\alpha, \beta \in K^\times$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

- (i) $K(\sqrt{\alpha}) = K(\sqrt{\beta})$.
- (ii) Es existiert ein $\gamma \in K^\times$ mit $\alpha = \gamma^2\beta$.

AUFGABE 4: Bestimmen Sie $[E : \mathbb{Q}]$ für die folgenden Zwischenkörper E von \mathbb{C}/\mathbb{Q} :

- (a) $E = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$
- (b) $E = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})$
- (c) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
- (d) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{1+i})$, wobei $i = \sqrt{-1}$.