

Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
 Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
 Übungsaufgaben, Blatt 10

AUFGABE 1: (a) Sei $y \in \mathbb{C}$ mit $y^4 = 5$, sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^6 = 15$. Weshalb liegt y nicht in $\mathbb{Q}(z)$?

(b) Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 = 10$, sei $\xi_{40} \in \mathbb{C}$ eine primitive 40-te Einheitwurzel. Liegt w in $\mathbb{Q}(\xi_{40})$?

(c) Sei $y \in \mathbb{C}$ mit $y^4 = 5$, sei $\xi_{25} \in \mathbb{C}$ eine primitive 25-te Einheitwurzel. Warum liegt y nicht in $\mathbb{Q}(\xi_{25})$?

AUFGABE 2: Sei E der Zerfällungskörper von $X^7 - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ über \mathbb{Q} . Zeigen Sie:

(a) Es gilt $[E : \mathbb{Q}] = 42$.

(b) Ist $y \in E$ mit $y^7 = 6$ und ist $\xi_7 \in \mathbb{C}$ eine primitive 7-te Einheitswurzel, so ist $y + \xi_7$ ein primitives Element für E/\mathbb{Q} .

(c) $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ enthält Elemente σ, τ mit $\text{ord}(\sigma) = 7$ und $\text{ord}(\tau) = 6$ und $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^3$.

(d) Es gibt genau einen Zwischenkörper F von E/\mathbb{Q} mit $[E : F] = 7$, nämlich $F = \mathbb{Q}(\xi_7)$.

(Hinweis: Weshalb induziert ein $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ mit $\text{ord}(\sigma) = 7$ ein Element $\bar{\sigma}$ in $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q})$? Was folgt für $\text{ord}(\bar{\sigma})$?)

AUFGABE 3: Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\xi_n \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitwurzel. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd.

(a) $\mathbb{Q}(\xi_m, \xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_{mn})$.

(b) $\mathbb{Q}(\xi_m) \cap \mathbb{Q}(\xi_n) = \mathbb{Q}$.

AUFGABE 4: Sei E der Körper mit 729 Elementen. Wieviele Teilkörper besitzt E ? Warum besitzt E genau 696 Elemente α mit $E = \mathbb{F}_3(\alpha)$? Weshalb gibt es daher genau 116 irreduzible normierte Polynome vom Grad 6 in $\mathbb{F}_3[X]$?