Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 11

AUFGABE 1: (Cauchy Riemannsche Differentialgleichungen) Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + iy$, können also schreiben: $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = u(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + iv(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$ (zu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$) mit eindeutig bestimmten Funktionen $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$, jeweils $U \to \mathbb{R}$. Sei $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(a) f ist komplex differenzierbar in z_0.

(b) Gelesen als Funktion $U \to \mathbb{R}^2$ auf $U \subset \mathbb{R}^2$ ist $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ total differenzierbar in z_0, und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \frac{\partial v}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = -\frac{\partial v}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}).$$

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt ferner

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad |f'(z_0)|^2 = \det(J_f(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}))$$

wobei J_f die Jacobische Matrix von f bezeichne.

AUFGABE 2: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x + iy) = (ax^2 - y) + i(x + by^2)$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) komplex differenzierbar ? Bestimmen Sie die Ableitung in diesen Punkten. (Hinweis: Aufgabe 1.)

AUFGABE 3: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf komplexe Differenzierbarkeit:

(a) $f(z) = \overline{z}$

(b) $f(z) = \sqrt{z}$ (Präzisieren Sie zunächst eine mögliche Definition dieser Funktion !)

AUFGABE 4: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Zeigen Sie, dass es keine in einer offenen Umgebung U von $0 \in \mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion f gibt mit $(f(z))^k = z$ für alle $z \in U$.