Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 12

Aufgabe 1: (a) Die Potenzreihe $\exp(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent, definiert also eine analytische Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sie erfüllt $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie $\exp(0) = 1$.

(b) Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus $(\mathbb{R}, +) \times ((\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{C}^\times, \bullet)$.

(c) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch eine auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe darstellbar und ist $f(0) = 1$ und $f'(z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gilt $f = \exp$.

(d) Auch $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ sind analytische Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bestimmen Sie ihre Potenzreihenentwicklungen um den Nullpunkt.

Aufgabe 2: Geben Sie eine holomorphe Funktion $\neq 0$ (auf einer geeigneten offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$) an, zu deren Nullstellenmenge es einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ gibt.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ in den folgenden Fällen:

(a) $a_n = n^s$ für festes $s \in \mathbb{R}$

(b) $a_n = n^{\log(n)}$

(c) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$

(d) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(Hinweis zu (b) und (c): Überlegen Sie sich, dass die aus der Analysis I bekannte Formel von Cauchy Hadamard auch über $\mathbb{C}$ gilt.)

Aufgabe 4: Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist durch ihren Realteil (oder: alternativ: durch ihren Imaginärteil) eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt.

(b) Sind folgende Funktionen $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ Realteil einer holomorphen Funktion ?

(i) $u(x + iy) = x^2 - 3x + y^2$

(ii) $u(x + iy) = x^2 - 3x + y^2$

Hinweis: Betrachten Sie die Differentialgleichungen für den Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, die sich aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ergeben.

Aufgabe 5: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Ist $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, so auch $g : \overline{U} \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$.