Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 2

Aufgabe 0: (Nicht zur schriftlichen Bearbeitung) Sei E/K eine Körpererweiterung, seien $x \in E$ und $y \in E$ algebraisch über K. Dann sind auch $x+y$ und xy algebraisch über K.

Aufgabe 1: (a) Sei R ein Integritätsbereich, sei K ein Teilring von R, der ein Körper ist. Ist R als K-Vektorraum endlich dimensional, so ist R ein Körper.

(b) Ein Integritätsbereich, der aus nur endlich viele Elementen besteht, ist ein Körper.

Aufgabe 2: Wir definieren rekursiv die Folge reeller Zahlen $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ durch $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n}$ mit $\alpha_{n+1} > 0$. Zeigen Sie $[\mathbb{Q}(\alpha_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Überlegen Sie sich $\mathbb{Q}(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}(\alpha_{n+1})$ und versuchen Sie $[\mathbb{Q}(\alpha_{n+1}) : \mathbb{Q}(\alpha_n)] = 2$ durch Induktion nach n zu zeigen.)

Aufgabe 3: Sei E/K eine Körpererweiterung, seien L_1 und L_2 Zwischenkörper von E/K.

(1) Zeigen Sie:

(1a) Ist L_1/K algebraisch, so auch L_1L_2/L_2.

(1b) Ist L_1/K endlich, so auch L_1L_2/L_2, und dabei gilt $[L_1L_2 : L_2] \leq [L_1 : K]$.

(1c) Sind L_1/K und L_2/K algebraisch, so auch L_1L_2/K.

(1d) Sind L_1/K und L_2/K endlich, so auch L_1L_2/K.

(1e) Gilt $[L_1 : K] \cdot [L_2 : K] = [L_1L_2 : K]$ in (1d), so ist $L_1 \cap L_2 = K$.

(1f) Sind $[L_1 : K]$ und $[L_2 : K]$ (in (1d)) Primzahlen, so gilt $[L_1 : K] \cdot [L_2 : K] = [L_1L_2 : K]$.

(2) Ist in (1b) stets $[L_1L_2 : L_2]$ ein Teiler von $[L_1 : K]$?

Aufgabe 4: Überlegen Sie sich, dass $A = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist (das brauchen Sie nicht aufzuschreiben). Überlegen Sie sich ferner, dass die Normabbildung $N : A \to \mathbb{Z}$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a^2 - 2b^2$ multiplikativ ist. Sei $\omega = 1 + \sqrt{2}$. Zeigen Sie:

(a) Ein Element $y \in A$ ist genau dann eine Einheit, wenn $|N(y)| = 1$.

(b) Elemente $y \in A$ mit $1 < y < \omega$ sind keine Einheiten.

(c) Die Einheitengruppe $A^\times$ von A besteht genau aus den Elementen $\epsilon\omega^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\epsilon \in \{1, -1\}$. Sie ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.