Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 3

Aufgabe 1: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m|n$.

(a) Es existiert ein kanonischer Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Auf den Einheiten induziert er einen Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

(b) Der Homomorphismus $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ ist surjektiv. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall einer Primzahlpotenz $n = p^r$. Benutzen Sie den chinesischen Restsatz im allgemeinen Fall.)

Aufgabe 2: Sei $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots$ die Folge der Primzahlen. Zeigen Sie $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Verfahren Sie wie in Aufgabe 2 von Blatt 2.)

Aufgabe 3: Ein Ring R heisst *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt.

(a) Ein Ring R ist genau dann lokal, wenn die Menge $R \backslash R^\times$ der Nichteinheiten ein Ideal bildet.

(b) Ist R lokal und ist $I \neq R$ ein Ideal, so ist auch R/I lokal.

Aufgabe 4: Ein Ring A heisst *euklidisch*, falls es eine Abbildung $\lambda : A \backslash \{0\} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass zu je zwei Elementen $a, b \in A$ mit $b \neq 0$ Elemente $q, r \in A$ existieren mit $a = qb + r$ und mit ($r = 0$ oder $\lambda(r) < \lambda(b)$). Zeigen Sie:

(a) Jedes Ideal eines euklidischen Ringes ist ein Hauptideal. (Hinweis: Verfahren Sie wie im Fall der Ringe $\mathbb{Z}$ und $K[X]$ (für Körper K).)

(b) Der Ring der Gausschen Zahlen $\{a + b\sqrt{-1} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Hauptidealring.