Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 4

Aufgabe 1: Sei E/K eine Körpererweiterung. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) E/K ist algebraisch.

(ii) Jeder Zwischenring von E/K (also jeder Teilring von E, der K enthält) ist ein Körper.

Aufgabe 2: Sei R ein faktorieller Ring, in dem jedes von zwei Elementen erzeugte Ideal ein Hauptideal ist. Zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 3: (a) Der Hauptidealring R sei Teilring eines Integritätsbereiches R'. Zeigen Sie: Sind $a, b, d \in R$ und ist d ein ggT von a und b in R, so ist d auch ein ggT von a und b in R'.

(b) Sei E/K eine Körpererweiterung und seien $f, g \in K[X]$. Zeigen Sie: Ist $h \in E[X]$ normiert und ein ggT von f und g in $E[X]$, so liegen alle Koeffizienten von h bereits in K, also $h \in K[X]$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind:

(a) $X^3 - 3X^2 + 2X - 3$

(b) $X^3 + 9X^2 + 6X - 3$

(c) $7X^3 - X^2 + 4X - 2$

(d) $3X^4 + 6X^2 - 12X + 10$

(e) $\frac{7}{8}X^4 + \frac{1}{2}X^3 + 5X^2 + 6X + 12$