Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 5

Aufgabe 0: (Diese Aufgabe ist nicht schriftlich zu bearbeiten, wohl aber in den Übungen zu besprechen.) Sei p eine Primzahl. Begründen Sie, dass es einen Körper mit p^2 Elementen gibt.

Aufgabe 1: $\mathbb{Q}(2^{\frac{1}{3}}, (-3)^{\frac{1}{2}})$ ist Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 2$ über $\mathbb{Q}$. (Hinweis: Blatt 1, Aufgabe 4d).

Aufgabe 3: Sei E/K eine Körpererweiterung, seien $\alpha, \beta \in E$ algebraisch über K. Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathrm{Min}(\alpha, K, X)$ irreduzibel über $K(\beta)$, wenn $\mathrm{Min}(\beta, K, X)$ irreduzibel über $K(\alpha)$ ist.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie durch Induktion nach n mit Hilfe des Satzes 4.4 der Vorlesung: Es gibt einen Erweiterungskörper E von K, so dass f über E vollständig in Linearfaktoren zerfällt: $f(X) = \gamma(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$ mit $\gamma \in K$ und $\alpha_i \in E$. Für den Teilkörper $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von E gilt $[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K] \leq n!$.