Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 6

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, $K(X)$ der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über K: Also $K(X) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in K[X], g \neq 0\}$ (mit $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ genau dann, wenn $f_1 g_2 = f_2 g_1$), versehen mit der Addition $\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}$ und der Multiplikation $\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$. Vermöge $f \mapsto \frac{f}{1}$ ist $K[X]$ ein Teilring von $K(X)$; insbesondere ist so K ein Teilkörper von $K(X)$.

(a) Ist $T = T(X) \in K(X)$ mit $T \notin K$, so ist die Körpererweiterung $K(X)/K(T)$ endlich. (Hinweis: Sei Y eine weitere freie Variable. Ist $T = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in K[X]$, so betrachten Sie das Polynoms $f(Y) - Tg(Y) \in K(T)[Y]$. Kann dieses das Nullpolynom sein ?)

(b) K ist algebraisch abgeschlossen in $K(X)$, das heisst es gilt $K = (K(X)/K)^{\mathrm{alg}}$.

(c) Die Körpererweiterung $K(X)/K$ hat unendlich viele Zwischenkörper. (Hinweis: Ist α nicht algebraisch über K, so auch α^2 nicht (weshalb ?), und es gilt $K(\alpha^2) \neq K(\alpha)$ (weshalb ?).)

(d) Ist E/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad n, so auch $E(X)/K(X)$.

Aufgabe 2: (a) Für Teilkörper E von $\mathbb{C}$ setze $\overline{E} = \{\overline{z} \mid z \in E\}$ (komplexe Konjugation). Sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, für den $\overline{K} = K$ gilt, und sei $w \in \mathbb{C}$ mit $w^2 \in K$. Gilt dann notwendig $\overline{K(w)} = K(w)$?

(b) Geben Sie Körpererweiterungen $E/F/K$ an, so dass E/F und F/K normal sind, nicht aber E/K.

Aufgabe 3: Sei E/K ein Körpererweiterung derart, dass $a_1, \ldots, a_n \in K$ existieren mit $E = K(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$. Es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K, und die Menge $\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}$ sei K-linear unabhängig. Zeigen Sie, dass $\alpha = \sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n}$ ein primitives Element für E/K ist, das heißt $E = K(\alpha)$. (Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{Aut}(E/K(\alpha))$.)

Aufgabe 4: Geben Sie eine endliche Körpererweiterung an, die unendlich viele Zwischenkörper besitzt. (Hinweis: Sei p eine Primzahl, $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Betrachten Sie den rationalen Funktionenkörper E in zwei Variablen über $\mathbb{F}_p$, also $E = \mathbb{F}_p(X, Y) := \mathbb{F}_p(X)(Y)$ [vgl. Aufgabe 1; überlegen Sie sich $\mathbb{F}_p(X)(Y) = \mathbb{F}_p(Y)(X)$] und darin den Teilkörper $K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$, sowie die Zwischenörper $K(X + tY)$ mit $t \in K$.)