Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 7

Aufgabe 1: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei R der Ring der *stetigen* Funktionen $f : J \to \mathbb{R}$. Zu $a \in J$ sei I_a die Menge aller $f \in R$ mit $f(a) = 0$.

(a) Jedes I_a ist ein maximales Ideal in R.

(b) Ist J ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, so ist jedes maximale Ideal $I \subsetneq R$ ist von der Form $I = I_a$ für ein $a \in J$. (Hinweis: Nutzen Sie die Kompaktheit von J um zu zeigen: Für jedes Ideal $I \subsetneq R$ existiert mindestens ein $a \in J$ mit $f(a) = 0$ für alle $f \in I$. Dazu ist es hilfreich, die Elemente f^2 zu $f \in I$ zu betrachten.)

Aufgabe 1*: (a) Sei R ein Ring, $I \subsetneq R$ ein Ideal. Zeigen Sie mit Hilfe von Zorn's Lemma: Es gibt ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ mit $I \subset \mathfrak{m}$.

(b) Wir nehmen die Notationen von Aufgabe 1 wieder auf. Ist J ein beschränktes und offenes Intervall, so ist nicht jedes maximale Ideal $I \subsetneq R$ von der Form $I = I_a$ für ein $a \in J$. (Hinweis: Ist etwa $J =]0, 1[$, so betrachten Sie die Menge I aller $f \in R$ mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie die Aussage aus (a).)

Aufgabe 2: Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$.

(i) Sei $f \in K[X]$, dazu f' die (formale) Ableitung von f (also $f' = \sum_{i\geq 1} i a_i X^{i-1}$ falls $f = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$). Es sind äquivalent:

(a) $f' = 0$

(b) $f \in K[X^p]$

(ii) Sei E/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in E$ algebraisch über K. Es gibt ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ derart, dass α^{p^m} separabel über K ist.

Aufgabe 3: (a) Sei I das von den Polynomen $f = X^3 - 2$ und $g = X^2 + XY + Y^2$ erzeugte Ideal im Polynomring $\mathbb{Q}[X, Y] = \mathbb{Q}[X][Y] = \mathbb{Q}[Y][X]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[X, Y]/I$ ein Zerfällungskörper für f über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Sei L ein Zerfällungskörper für $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie ein primitives Element für die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$, also ein $a \in L$ mit $L = \mathbb{Q}(a)$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ irreduzibel und L/K eine normale Körpererweiterung. Sind $g, h \in L[X]$ normierte Primteiler von f in $L[X]$, so existiert ein $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$ mit $\sigma(g) = h$.