Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 8

Aufgabe 1: (a) Lösen Sie erneut Aufgabe 3 von Blatt 1, nun aber unter Verwendung der Galoistheorie: Betrachten Sie dazu $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ in $K(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$.

(b) Sei $E = \mathbb{Q}(x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ derart, dass $x^2 = 2$ und $y^3 = 3$. Zeigen Sie $E = \mathbb{Q}(x + y)$ mittels Galoistheorie.

Aufgabe 2: Sei $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

(i) $E/\mathbb{Q}$ is galoissch.

(ii) $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(iii) Geben Sie alle Zwischenkörper von $E/\mathbb{Q}$ an. Warum ist $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ ein primitives Element für $E/\mathbb{Q}$? Bestimmen Sie $\mathrm{Min}(\alpha, \mathbb{Q}, X)$.

Aufgabe 3: Sei E ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, der galoissch über $\mathbb{Q}$ ist. Sei $E_0 = E \cap \mathbb{R}$.

(i) Es gilt $[E : E_0] \leq 2$.

(ii) Ist $E_0/\mathbb{Q}$ stets galoissch ?

(iii) Sei $E_0/\mathbb{Q}$ galoissch und sei ρ ein erzeugendes Element von $\mathrm{Gal}(E/E_0)$; wir lesen ρ zugleich als ein Element von $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. Zeigen Sie $\rho\sigma = \sigma\rho$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel, sei E ein Zerfällungskörper für f. Ist $\mathrm{Gal}(E/K)$ abelsch, so gilt $[E : K] = \deg(f)$.