Prof. Dr. Elmar Große-Klönne

Institut für Mathematik

Algebra und Funktionentheorie

Übungsaufgaben, Blatt 9

AUFGABE 1: Sei E/K eine endliche Körpererweiterung, sei G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(E/K)$. Zeigen Sie: (a) G ist endlich und $|G|$ ist ein Teiler von $[E:K]$.

(b) Genau dann gilt $|G| = [E:K]$, wenn E/K galoissch ist mit $G = \mathrm{Gal}(E/K)$.

AUFGABE 2: Sei E der Zerfällungskörper von $X^3 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$. Bestimmen Sie die Zwischenkörper von $E/\mathbb{Q}$ sowie deren Grade über $\mathbb{Q}$.

AUFGABE 3: Sei $E = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ mit n paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Zeigen Sie, dass $E/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und dass $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Ist $\sqrt{p_1} + \ldots + \sqrt{p_n}$ ein primitives Element für $E/\mathbb{Q}$?

AUFGABE 4: Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, sei $f \in K[X]$ irreduzibel, sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Genau dann ist f ein Teiler von $X^{q^n} - X$ in $K[X]$, wenn n durch $\deg(f)$ teilbar ist.