Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Klausur
05. Februar 2010

Aufgabe 1: (6 Punkte) Aus einem altchinesischen Mathematikbuch: Wieviele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will, und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 3 Münzen und drei Küken 1 Münze kosten ? Die 100 Münzen sollen hierbei vollständig verbraucht werden.

Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem (über dem Körper $\mathbb{Q}$) auf und bestimmen Sie dessen Lösungsmenge.

Bestimmen Sie damit alle Lösungen des Vogelkaufproblems.

Lösung: Seien x_1 die Hähneanzahl, x_2 die Hennenanzahl und x_3 die Kükenanzahl. Das linearen Gleichungssystem ist $x_1 + x_2 + x_3 = 100$, $5x_1 + 3x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100$. Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist $\mathbb{Q}(4, -7, 3)^t + (-100, 200, 0)^t$, Lösungen des Vogelkaufproblems sind damit $(0, 25, 75)^t$, $(4, 18, 78)^t$, $(8, 11, 81)^t$, $(12, 4, 84)^t$.

Aufgabe 2: (6 Punkte) Für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gelte $f \circ f = f$, ferner $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$. Berechnen Sie die darstellenden Matrizen A_f von f

(a) bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für den Quell- und den Zielraum, und

(b) bezüglich der Standardbasis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ für den Quell- und den Zielraum.

Begründen Sie kurz (!) Ihre Antworten.

Lösung: Die Abbildung schickt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Beweis !). In (a) lautet die Matrix also $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, in (b) lautet sie folglich $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Test zu (b): Es gilt $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: (6 Punkte) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen: sie ist rekursiv definiert durch die Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ und die Festsetzungen $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A^{(n)} = (a_{st})_{st} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$$

definiert durch $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$, durch $a_{st} = i(= \sqrt{-1})$ falls $s = t+1$ oder falls $t = s+1$, und durch $a_{st} = 0$ für alle anderen Paare (s,t). Zeigen Sie $\det(A^{(n)}) = f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Vollständige Induktion; Entwicklung von $A^{(n+1)}$ nach der $(n+1)$-ten Zeile.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Betrachtung der zugehörigen charakteristischen Polynome χ_{ℓ_A} alle 2×2-Matrizen A über $\mathbb{R}$, die zu sich selbst invers sind.

Lösung: Es ist $A^2 - \mathrm{Spur}(A)A + \det(A)I_2 = \chi_{\ell_A}(A) = 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Die Bedingung $A^2 = I_2$ ist also äquivalent zu $(\det(A)+1)I_2 = \mathrm{Spur}(A)A$. Diejenigen A mit $\mathrm{Spur}(A) \neq 0$, die dies erfüllen, sind die beiden Matrizen $A = \pm I_2$. Ist dagegen $\mathrm{Spur}(A) = 0$ so ergibt sich die Bedingung $\det(A) = -1$.

Aufgabe 5: (i) (2 Punkte) Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum der Dimension 3, sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung mit $f^2 \neq 0$ und $f^3 = 0$. Zeigen Sie $f(V) = \mathrm{Ker}(f^2)$ und $f^2(V) = \mathrm{Ker}(f)$.

Lösung: Aus $f^3 = 0$ folgen $f(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2)$ und $f^2(V) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Aus $f^3 = 0$ folgt $\dim(f(V)) \leq \dim(V) - 1 = 2$. Aus $f^2 \neq 0$ folgt $\dim(f(V)) \geq 1$. Wäre aber $\dim(f(V)) = 1$, also $f(V) =< w >$ für ein $w \in V$, so $f(w) = 0$ (da sonst $f|_{f(V)}$ bijektiv, im Widerspruch zu $f^3 = 0$), also $f^2(V) = f(< v >) = 0$, im Widerspruch zu $f^2 \neq 0$. Also $\dim(f(V)) = 2$, und nun weiter mit Dimensionsformel.

(ii) (5 Punkte) Sei K ein Körper, seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei V ein K-Vektorraum der Dimension nm und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Es gelte $f^n = 0$ und $\dim(f^{n-1}(V)) = m$. Zeigen Sie $\dim(f^i(V)) = (n-i)m$ für alle $1 \leq i \leq n-2$.

Lösung: Seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ derart gewählt, dass $f^{n-1}(v_1), \ldots, f^{n-1}(v_m)$ eine Basis von $f^{n-1}(V)$ ist. Es genügt zu zeigen, dass $f^i(v_1), \ldots, f^i(v_m), \ldots, f^{n-2}(v_1), \ldots, f^{n-2}(v_m), f^{n-1}(v_1), \ldots, f^{n-1}(v_m)$ eine Basis von $f^i(V)$ ist.

Lineare Unabhängigkeit: betrachte Linearkombination der Null und wende darauf nacheinander $f^{n-i-1}, f^{n-i-2}, \ldots$ an, dies ergibt nach und nach Verschwinden aller Koeffizienten. Erzeugendensystem: Anwendung der Dimensionsformel für $f^{n-1} : V \to V$ ergibt $\dim(\mathrm{Ker}(f^{n-1})) = (n-1)m$, also ist $v_1, \ldots, v_m, f(v_1), \ldots, f(v_m), \ldots, f^{n-1}(v_1), \ldots, f^{n-1}(v_m)$ eine Basis von V und $f(V) = \mathrm{Ker}(f^{n-1})$, insbesondere $\dim f(V) = (n-1)m$. Anwendung der Dimensionsformel für $f^{n-2} : f(V) \to f(V)$ ergibt $\dim(\mathrm{Ker}(f^{n-2} : f(V) \to f(V))) = (n-2)m$, also ist $f(v_1), \ldots, f(v_m), f^2(v_1), \ldots, f^2(v_m), \ldots, f^{n-1}(v_1), \ldots, f^{n-1}(v_m)$ eine Basis von $f(V)$ und $f^2(V) = \mathrm{Ker}(f^{n-2} : f(V) \to f(V))$, insbesondere $\dim f^2(V) = (n-2)m$. Induktiv weiter so.

Kreuzen Sie auf dem dafür vorgesehenen Lösungsbogen für die folgenden Aufgaben jeweils die richtigen Aussagen an, und nur diese. In jeder

Aufgabe ergibt die korrekte Bestimmung genau der richtigen Aussagen jeweils drei Punkte; wird genau ein Kreuz falsch gesetzt oder irrtümlich nicht gesetzt, so ergibt dies noch einen Punkt.

Aufgabe 6: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Gruppen sind kommutativ ?

(a) $(K - \{0\}, \bullet)$

(b) $(V, +)$

(c) $\mathrm{GL}_4(K)$

(d) S_3

Aufgabe 7: Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K mit $\dim(V) = 3$ und $\dim(W) = 2$. Ferner sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung mit $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Welche der folgenden K-Vektorräume sind isomorph zu K^2 ?

(a) $\mathrm{Im}(f)$

(b) $\mathrm{Ker}(\ell)$ für $\ell \in V^* - \{0\}$

(c) $\mathrm{Hom}_K(\mathrm{Ker}(f), W)$

(d) $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$

Aufgabe 8: Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit K-Untervektorräumen U, U_1 und U_2. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

(b) $\dim(U^\perp) = \dim(U)$

(c) $\dim({}^\perp(V^\perp)) = \dim(V^*)$

(d) ${}^\perp(V^*) = V$

Aufgabe 9: Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit K-Untervektorräumen U und U'. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) $\dim(V/U) + \dim(U) = \dim(V)$

(b) $(U + U')/U \cong U/(U \cap U')$

(c) es existiert genau dann ein Isomorphismus von K-Vektorräumen $U \cong U'$, wenn ein Isomorphismus von K-Vektorräumen $V/U \cong V/U'$ existiert

(d) Die natürliche K-lineare Abbildung $V \to V/U$ ist surjektiv und ihr Kern ist U.

Aufgabe 10: Betrachten Sie die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) $\ell(\pi) = 3$

(b) $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

(c) π kann als Produkt von 6 Transpositionen geschrieben werden

(d) $\pi^3 = \mathrm{id}$

Aufgabe 11: Es seien A, B, C, $D \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gelte $\det(CD) = 120$, $\det(CB^3) = 135$ und $\det(BA^{-1}) = 1$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) $\det(A) = 4$

(b) $\det(B) = 4$

(c) $\det(C) = 10$

(d) $\det(D) = 12$

Aufgabe 12: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension $n \in \mathbb{N}$. Seien $\Delta_1 : V^n \to K$ und $\Delta_2 : V^n \to K$ zwei Determinantenformen auf V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) es gibt ein Element $a \in K - \{0\}$ mit $\Delta_1 = a\Delta_2$

(b) für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gilt $\Delta_2(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$

(c) für jedes Element $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ist die durch $\Delta_1'(v_1, \ldots, v_n) := \Delta_1(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ definierte Abbildung $\Delta_1' : V^n \to K$ eine Determinantenform auf V

(d) $\Delta_1 - \Delta_2 : V^n \to K$ ist eine alternierende K-Multilinearform