

Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne

Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Übungsaufgaben, Blatt 9

AUFGABE 1: Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ werde bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^3 und der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von \mathbb{R}^4

dargestellt durch die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende

Matrix von f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von \mathbb{R}^3 und der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ von \mathbb{R}^4 .

AUFGABE 2: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & -1 & -3 & -1 & -8 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4,5}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen sie eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildes der durch A dargestellten \mathbb{R} -linearen Abbildung. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen

Gleichungssystems $Ax = b$ in den beiden Fällen $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 3: Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen über \mathbb{Q} regulär sind, und bestimmen Sie ihre Inversen.

$$(i) \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, (ii) \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(iii) $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ mit $a_{ij} = 1$ für $i \geq j$ und $a_{ij} = 0$ für $i < j$.

AUFGABE 4: Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum, U ein K -Untervektorraum von V und $p : V \rightarrow V/U$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(i) Die Zuordnung $W \mapsto p(W)$ definiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der K -Untervektorräume von V , die U enthalten, und der Menge der K -Untervektorräume von V/U .

(ii) Für zwei beliebige U enthaltende K -Untervektorräume W_1 und W_2 von V gilt $p(W_1 + W_2) = p(W_1) + p(W_2)$ und $p(W_1 \cap W_2) = p(W_1) \cap p(W_2)$ (all dies sind dies K -Untervektorräume von V/U !).

AUFGABE 5: (4 Zusatzpunkte) [Scherung] Zu $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 \\ (a-1)^2 & 2-a \end{pmatrix}.$$

Sei $\ell_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die zugeordnete \mathbb{R} -lineare Abbildung.

- (i) Finden Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\ell_M(x) = x$.
- (ii) Ergänzen Sie x zu einer Basis x, y von \mathbb{R}^2 und schreiben Sie $\ell_M(y)$ als Linearkombination von x und y .
- (iii) Zeigen Sie $\ell_M(\alpha x + \beta y) \in \beta y + \mathbb{R}x$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (iv) Veranschaulichen Sie die Abbildung $\ell_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Welche Punkte bleiben fest?