

Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne  
 Institut für Mathematik

**Lineare Algebra und Analytische Geometrie I\***  
 Testklausur zur Semestermitte  
 Version B

**Kreuzen Sie jeweils die richtigen Aussagen an, und nur diese. In jeder Aufgabe ergibt die korrekte Bestimmung genau der richtigen Aussagen jeweils drei Punkte; wird genau ein Kreuz falsch gesetzt oder irrtümlich nicht gesetzt, so ergibt dies noch einen Punkt.**

AUFGABE 1: Welche der folgenden Aussageformen sind logische Regeln (das heisst bei beliebiger Zuordnung von Wahrheitswerten zu  $A$ ,  $B$  und  $C$  ergibt sich stets eine wahre Aussage) ?

- (a)  $B \vee \neg(A \wedge (A \Rightarrow B))$
- (b)  $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- (c)  $(A \wedge \neg A) \vee B$
- (d)  $(A \vee \neg A) \vee \neg B$

AUFGABE 2: Welche der folgenden Aussagen gelten für *alle* Teilmengen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  einer Menge  $X$  ?

- (a)  $(A \cap B) \cup A = A - B$
- (b)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
- (c)  $A - (A - B) = A$
- (d)  $(A - B = \emptyset) \iff (A \cap B = A)$

AUFGABE 3: Welche der folgenden Aussagen sind für *alle* Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  zwischen nichtleeren Mengen  $X$  und  $Y$  richtig ?

- (a) Existiert ein  $y \in Y$ , für welches  $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$  leer oder einelementig ist, so ist  $f$  injektiv.
- (b) Ist  $f$  injektiv, so auch surjektiv.
- (c)  $f$  ist genau dann surjektiv, wenn für jede Teilmenge  $N$  von  $Y$  gilt:  $f(f^{-1}(N)) = N$ . [Zur Erinnerung:  $f^{-1}(N) = \{x \in X \mid f(x) \in N\}$ ]
- (d)  $f$  ist genau dann surjektiv, falls ein  $y \in Y$  und ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$  existiert.

AUFGABE 4: Betrachten Sie die folgende Eigenschaft einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ :  
 (L) für alle Mengen  $V$  und alle Abbildungen  $g : V \rightarrow X$  und  $h : V \rightarrow X$  mit  $f \circ g = f \circ h$  gilt notwendig  $g = h$ .

Welche der folgenden Implikationen gelten für *alle*  $f$  ?

- (a) Ist  $f$  injektiv, so erfüllt  $f$  die Bedingung (L).
- (b) Ist  $f$  surjektiv, so erfüllt  $f$  die Bedingung (L).

- (c) Erfüllt  $f$  die Bedingung (L), so ist  $f$  injektiv.  
 (d) Erfüllt  $f$  die Bedingung (L), so ist  $f$  surjektiv.

AUFGABE 5: Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, seien  $v, w \in V$ . Welche der folgenden Aussagen gelten immer ?

- (a)  $v \in \langle w \rangle$  oder  $w \in \langle v \rangle$   
 (b)  $w \in \langle v \rangle \iff v \in \langle w \rangle$   
 (c)  $(w \neq 0) \wedge (v \neq 0) \Rightarrow \langle v, w \rangle \neq (\langle v \rangle \cup \langle w \rangle)$   
 (d)  $\langle v, w \rangle = \langle v \rangle + \langle w \rangle$

AUFGABE 6: Sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

- (a) Die leere Menge ist ein  $K$ -Untervektorraum von  $V$ .  
 (b) Zu jedem Vektor  $v \in V$  existiert ein  $\lambda \in K$  mit  $\lambda v = v$ .  
 (c) Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  und  $v \in V$  mit  $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ , so gilt  $\lambda_1 = \lambda_2$ .  
 (d) Für alle  $\lambda \in K$  und  $v \in V$  gilt  $\lambda(-v) = (-\lambda)v$ .

AUFGABE 7: Betrachten Sie in  $\mathbb{R}^2$  die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

- (a) Das System  $v_1, v_2$  ist linear abhängig.  
 (b) Das System  $v_1, v_2, v_3$  ist ein Erzeugendensystem von  $\mathbb{R}^2$ .  
 (c) Nach Weglassen eines beliebigen der drei Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  verbleibt eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ .  
 (d) Das System  $v_1, v_2, v_3$  enthält eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ .

AUFGABE 8: Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein zweidimensionaler  $K$ -Vektorraum. Welche der folgenden  $K$ -Vektorräume sind isomorph zu  $K^4$  ?

- (a)  $V \oplus V$   
 (b)  $V \oplus V \oplus V \oplus V$   
 (c)  $\text{Hom}_K(V, V)$   
 (d)  $\text{Ker}(\ell)$  für  $\ell \in \text{Hom}_K(K^5, K)$ ,  $\ell \neq 0$ .

AUFGABE 9: Sei  $K$  ein Körper,  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung zwischen  $K$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  mit  $\dim(V) = 5$  und  $\dim(W) = 3$ . Es seien  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  beziehungsweise  $w_1, w_2, w_3$  Basen von  $V$  und  $W$ , sei  $A_f = (a_{ij})_{i,j}$  die (bezüglich dieser Basen) darstellende Matrix für  $f$ . Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

- (a) Für alle  $1 \leq j \leq 5$  gilt  $f(v_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} w_i$ .

- (b) Die Matrix  $A_f$  hat 5 Zeilen und 3 Spalten.
- (c)  $\text{Im}(f) = W \iff \text{Rang}(A_f) = 3$
- (d)  $\text{Rang}(A_f) \leq 3$

AUFGABE 10: Welche Aussagen über lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen sind richtig ?

- (a) Es gibt lineare Gleichungssysteme ohne Lösungen.
- (b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem besitzt eine Lösung.
- (c) Jedes lineare Gleichungssystem, das mindestens zwei verschiedenen Lösungen besitzt, besitzt unendlich viele Lösungen.
- (d) Besitzt ein lineares Gleichungssystem genau eine Lösung, so ist es inhomogen.

AUFGABE 11: Seien  $U, W$  zwei  $K$ -Untervektorräume des endlich erzeugten  $K$ -Vektorraums  $V$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

- (a) Gilt  $U + W = U$ , so folgt  $\dim(U) - \dim(U \cap W) = \dim(U + W)$ .
- (b) Für alle  $v \in V - W$ , gilt  $U \cap (W + v) = \emptyset$ .
- (c) Seien  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V$  und  $W'$  ein Komplement von  $W$  in  $V$ . Gilt  $U' + W' = V$ , so folgt  $U \cap W = 0$ .
- (d) Aus  $U^\perp + W^\perp = V^*$  folgt  $U \cap W = 0$ .

AUFGABE 12: Sei  $K$  ein Körper und  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,2}(K)$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

- (a) Ist  $A$  regulär, so ist  $a \neq 0$  oder  $b \neq 0$ .
- (b)  $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2$  [hier ist  $(ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$ ]
- (b) Ist  $ad - bc = 0$ , so ist die zu  $A$  gehörige lineare Abbildung  $\ell_A : K^2 \rightarrow K^2$  nicht surjektiv.
- (d) Ist  $K = \mathbb{C}$  und gilt  $c = -b$  und  $d = a$ , so  $\text{Rang}(A) \neq 1$ .

AUFGABE 13: Sei  $K$  ein Körper und  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten  $K$ -Vektorräumen, seien  $v_1, \dots, v_n$  Elemente von  $V$ . Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

- (a) Ist  $v_1, \dots, v_n$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , so lässt sich  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  zu einer Basis von  $W$  ergänzen [das heisst dann existieren  $w_1, \dots, w_m$  derart, dass  $f(v_1), \dots, f(v_n), w_1, \dots, w_m$  eine Basis von  $W$  ist].
- (b) Ist das System  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig, so lässt sich  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  zu einer Basis von  $W$  ergänzen.
- (c) Ist das System  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  linear unabhängig, so lässt sich  $v_1, \dots, v_n$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen [das heisst dann existieren  $v'_1, \dots, v'_t$  derart, dass  $v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_t$  eine Basis von  $V$  ist].

(d) Ist  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  eine Basis von  $W$ , so lässt sich  $v_1, \dots, v_n$  zu einer Basis von  $V$  ergänzen.

AUFGABE 14: Sei  $K$  ein Körper, sei  $A \in \text{Mat}_{n,n}(K)$ . Welche der folgenden Aussagen über  $A$  sind äquivalent zur Regularität von  $A$  ?

- (a) Es gibt ein  $B \in \text{Mat}_{n,n}(K)$  mit  $AB = I_n = BA$ .
- (b) Für alle  $b \in K^n$  existiert mindestens eine Lösung  $x \in K^n$  des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ .
- (c) Die durch  $A$  beschriebene lineare Abbildung  $K^n \rightarrow K^n, x \mapsto Ax$ , ist injektiv.
- (d) Die Spalten von  $A$  bilden ein Erzeugendensystem für  $K^n$ .

AUFGABE 15: Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ . Diese Matrix ist regulär, sei

$A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  die inverse Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Koeffizienten  $b_{ij}$  von  $A^{-1}$  sind richtig ?

- (a)  $b_{1,3} = 0$
- (b)  $b_{2,3} = 0$
- (c)  $b_{3,1} = 4$
- (d)  $b_{1,1} = 1$