Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 1

Aufgabe 1: (a) Jeder Betrag auf einem endlichen Körper ist trivial.

(b) Ein Betrag $|.|$ auf dem Körper K ist genau dann nichtarchimedisch, wenn ein $M > 0$ mit $|n \cdot 1| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ existiert.

(c) Jeder Betrag auf einem Körper positiver Charakteristik ist nichtarchimedisch.

Aufgabe 2: (Satz von Ostrowski) Sei $|.|$ ein nichttrivialer Betrag auf dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

(i) $|.|$ ist ein p-adischer Betrag, das heisst es existiert eine Primzahl p und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$, so dass $|x| = c^{v_p(x)}$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (Hier ist $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die p-adische Bewertung.)

(ii) Es existiert ein $\alpha > 0$, so dass $|x| = |x|_\infty^\alpha$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, wobei $|.|_\infty : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ den üblichen (archimedischen) Absolutbetrag bezeichnet.

Ansatz: Ist $|.|$ nichtarchimedisch, so ist $\{x \in \mathbb{Z}\,;\, |x| < 1\}$ ein nichttriviales Primideal in $\mathbb{Z}$. Schwieriger ist der Fall, in dem $|.|$ archimedisch ist. Zeige zunächst $|m| \leq \max\{1, |n|\}^{\log(m)/\log(n)}$ für $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n, m > 1$. [Dazu: Zu $t \in \mathbb{N}$ schreibe $m^t = \sum_{i=0}^{s} a_i n^i$ mit $a_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ and $a_s \neq 0$. Dann $s/t \leq \log(m)/\log(n)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt andererseits $|m|^t \leq (s+1)n \cdot \max\{1, |n|^s\}$.] Da $|.|$ nichtarchimedisch ist, folgt $|n| > 1$ (mit Aufgabe 1). Nun vertausche in der resultierenden Ungleichung die Rollen von n und m.

Aufgabe 3: (a) Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $|.|$ ein Betrag auf L. Zeigen Sie: Genau dann ist $|.|$ trivial, wenn die Restriktion von $|.|$ nach K trivial ist.

(b) Es existiert genau ein Betrag auf $\mathbb{C}$, der den (üblichen archimedischen) Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ fortsetzt.

Aufgabe 4: (Lemma von Gauss) Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K, dazu $A = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$. Zeigen Sie: Gilt $fg \in A[X]$ für normierte Polynome $f, g \in K[X]$, so auch $f \in A[X]$ und $g \in A[X]$. Wie folgt hieraus das übliche Lemma von Gauss (mit $A = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Q}$) ?