Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 2

AUFGABE 1: (a) $\mathbb{Z}_p$ ist folgenkompakt (jede Folge besitzt eine konvergente Teilfolge), also kompakt.

(b) Gegeben seien $s \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_s]$. Man nennt $f(X) = 0$ eine *diophantische Gleichung* und fragt nach ihren Lösungen $(x_1, \ldots, x_s)$ in $\mathbb{Z}^s$. Im allgemeinen ist diese Frage sehr schwierig zu beantworten. Eine (einfachere) Approximation ist die Frage nach $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}^s$, so dass $f(x) \equiv 0$ *modulo* $m\mathbb{Z}$, für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$. Dem chinesischen Restsatz zufolge genügt es, diese Frage für Primzahlpotenzen m zu stellen. Eine wesentliche Motivation für die Einführung der p-adischen Zahlen war und ist die (geometrisch-)systematische Untersuchung der Gleichungen $f(x) \equiv 0$ *modulo* $p^n\mathbb{Z}$, für eine Primzahl p und alle $n \in \mathbb{N}$ *gemeinsam*. Dies ist Inhalt der folgenden Aufgabe:

Sei p eine Primzahl, sei $s \in \mathbb{N}$. Ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_s]$ hat eine Nullstelle $(x_1, \ldots, x_s)$ in $\mathbb{Z}_p^s$ genau dann, wenn es eine Nullstelle in $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^s$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat.

AUFGABE 2: Sei p eine Primzahl.

(a) Jeder $\mathbb{Z}_p$-Modul mit endlicher Elementeanzahl ist (mit der Addition als Gruppenverknüpfung) eine abelsche p-Gruppe. [Eine p-Gruppe ist eine Gruppe, deren Elementeanzahl eine Potenz von p ist.]

(b) Jede endliche abelsche p-Gruppe trägt eine Struktur als $\mathbb{Z}_p$-Modul, derart, dass die Addition die gegebene Gruppenverknüpfung ist.

AUFGABE 3: (a) Bestimme die 3-adische Entwicklung von $\frac{1}{5}$, also die Koeffizienten $a_i \in \{0, 1, 2\}$ der Reihe $\frac{1}{5} = \sum_{i>>-\infty} a_i 3^i$ in $\mathbb{Q}_3$.

(b) Sei p eine Primzahl, seien $k, l \in \mathbb{N}$. Die Folge $1 + p^k + p^{2k} + \ldots p^{(l-1)k} = \frac{1-p^{lk}}{1-p^k}$ konvergiert p-adisch gegen $\frac{1}{1-p^k}$.

(c) Sei p eine Primzahl. Ein Element $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ liegt genau dann in $\mathbb{Q}$, wenn seine p-adische Entwicklung (genauer: deren Ziffernfolge in $\{0, \ldots, p-1\}$) ab einem endlichen Startabschnitt periodisch wird.

AUFGABE 4: Sei p eine Primzahl, sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgende Formel für $v_p(n!)$: Schreiben wir $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_k p^k$ mit $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ und setzen wir $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$, so gilt $v_p(n!) = \frac{n - s_n}{p-1}$.