Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 3

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, $|.| : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Betrag auf K. Eine K-*Vektorraumnorm* auf einem endlich dimensionalen K-Vektorraum V ist eine Abbildung $||.|| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $||v|| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$

(ii) $||v + w|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $v, w \in V$

(iii) $||av|| = |a| \cdot ||v||$ für alle $a \in K$ und $v \in V$

Zwei K-Vektorraumnormen auf V heissen *äquivalent*, wenn sie die gleiche Topologie auf V definieren. Zeigen Sie:

(a) Ist $e = \{e_i\}_i$ eine K-Basis des endlich dimensionalen K-Vektorraums V, so definiert $||\sum_i a_i e_i||_e = \max_i |a_i|$ (mit $a_i \in K$) eine K-Vektorraumnorm auf V.

(b) Zwei K-Vektorraumnormen $||.||_1$, $||.||_2$ auf einem endlich dimensionalen K-Vektorraum V sind genau dann äquivalent, wenn Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren, so dass $C_1||v||_1 \leq ||v||_2 \leq C_2||v||_1$ für alle $v \in V$.

(c) Ist K vollständig, so sind alle K-Vektorraumnormen auf einem endlich dimensionalen K-Vektorraum V äquivalent. Für jede dieser Normen ist V vollständig (jede Cauchfolge konvergiert).

Aufgabe 2: Gegeben seien zwei nichttriviale Beträge $|.|_1$ und $|.|_2$ auf einem Körper K. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $|.|_1$ und $|.|_2$ sind *äquivalent*, das heisst sie definieren die gleiche Topologie auf K.

(b) Es existiert ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|x|_1 = |x|_2^s$ für alle $x \in K$.

(c) Für alle $x \in K$ mit $|x|_1 < 1$ gilt $|x|_2 < 1$.

Ansatz: Für (c)$\Rightarrow$(b) zeige zunächst $|x|_1 < 1$ für alle $x \in K$ mit $|x|_2 < 1$. Dann fixiere ein $a \in K$ mit $0 < |a|_1 < 1$. Zu jedem $x \in K^\times$ existieren dann $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $|x|_1 = |a|_1^{\alpha_1}$ und $|x|_2 = |a|_2^{\alpha_2}$. Zeige $\alpha_1 = \alpha_2$.

Aufgabe 3: (a) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $a_n = \sum_{j=0}^{n-1} 3 \cdot 10^j$. Für welche Primzahlen p ist diese Folge p-adisch konvergent ? Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert.

(b) Wir betrachten die Potenzreihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x},$$

$$1 + x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \ldots + \binom{2n}{n} 2^{-n} x^{2n} + \ldots = (1 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

jeweils für $x = \frac{2}{3}$. Diese Reihen konvergieren in $\mathbb{R}$; bestimmen Sie ihren Grenzwert. Für welche Primzahlen p konvergieren sie in $\mathbb{Q}_p$? Bestimmen Sie den Grenzwert; vergleichen Sie !

Aufgabe 4: Seien $b_{ij} \in \mathbb{Q}_p$ zu allen $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ gegeben. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiere ein $M > 0$, so dass $|b_{ij}|_p < \epsilon$ für alle (i,j) mit $\max\{i,j\} \geq M$. Dann konvergieren die Reihen $\sum_i(\sum_j b_{ij})$ und $\sum_j(\sum_i b_{ij})$, und zwar gegen denselben Grenzwert.