Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 4

Aufgabe 1: Sei $a \in \mathbb{Z}$, sei p eine Primzahl derart, dass p^2 kein Teiler von a ist.

(a) Ist p Teiler von a, so hat die Gleichung $X^2 - a = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}_p$.

(b) Sei $p \neq 2$ und p kein Teiler von a.

(b1) Ist a quadratischer Rest modulo p (das heisst: existiert ein $\alpha \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha^2 \equiv a$ modulo $p\mathbb{Z}$), so hat die Gleichung $X^2 - a = 0$ zwei Lösungen in $\mathbb{Q}_p$.

(b2) Ist a kein quadratischer Rest modulo p, so hat die Gleichung $X^2 - a = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}_p$.

(c) Sei $p = 2$ und 2 kein Teiler von a.

(c1) Ist $a \equiv 1$ modulo $8\mathbb{Z}$, so hat die Gleichung $X^2 - a = 0$ zwei Lösungen in $\mathbb{Q}_p$.

(c2) Ist $a \not\equiv 1$ modulo $8\mathbb{Z}$, so hat die Gleichung $X^2 - a = 0$ keine Lösung in $\mathbb{Q}_p$.

Aufgabe 2: Seien p, $\tilde{p}$ zwei verschiedene Primzahlen.

(a) $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_{\tilde{p}}$ sind nicht isomorph als *topologische* Körper (es existiert kein Körperisomorphismus zwischen $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_{\tilde{p}}$, der zugleich ein Homöomorphismus ist).

(b) Viel stärker: $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Q}_{\tilde{p}}$ sind nicht einmal isomorph als (abstrakte) Körper !

Aufgabe 3: Sei K ein vollständiger diskret bewerteter Körper der Charakteristik 0. Sei $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ die zugehörige normalisierte (das heisst: surjektive) diskrete Bewertung. Ein Polynom $f(X) \in K[X]$ heisst *Eisensteinpolynom* falls für $f(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ gilt: $v(a_0) = 0$, $v(a_i) > 0$ für alle $i < n$, und $v(a_n) = 1$.
(a) Eisensteinpolynome sind irreduzibel.
(b) Sei L/K eine endliche Erweiterung. Zeige: L/K ist genau dann total verzweigt, falls ein Eisensteinpolynom $f(X) \in K[X]$ sowie eine Nullstelle $\alpha \in L$ existieren mit $L = K[\alpha]$.

Aufgabe 4: Der Körper K seit mit einem (nicht notwendig diskreten) Betrag $|.|$ versehen. Die *Tate-Algebra* (in einer Variablen) über K ist definiert als

$$T_1 = \{\sum_{i\geq 0} a_iX^i \in K[[X]] \ ; \ |a_i| \overset{i\to\infty}{\to} 0\}.$$

(a) T_1 ist eine K-Algebra. Es gilt

$$T_1 = \{\sum_{i\geq 0} a_iX^i \in K[[X]] \ ; \ \sum_{i\geq 0} a_i\beta^i \text{ konvergiert für alle } \beta \in K \text{ mit } |\beta| \leq 1\}.$$

(b) T_1 ist stabil unter formaler Differentiation: Mit $f(X) = \sum_{i\geq 0} a_iX^i \in T$ gilt auch $f'(X) = \sum_{i\geq 1} ia_iX^{i-1} \in T_1$.
(c) Ist die formale Differentiation $(.)' : T_1 \to T_1$ surjektiv ? Spielt die Charakteristik von K hier eine Rolle ?