Prof. E.-W. Zink
Institut für Mathematik

Vorlesung über Harmonische Analyse auf Zahlkörpern

0 Übersicht

0.1 Dirichletsche L-Funktionen (nach Iwasawa).
Dirichletcharakter zum Modul n, die Gruppe der primitiven Dirichletcharaktere, zugehörige L-Reihen. Euler-Produkt und Funktionalgleichung. Die modifizierten L-Reihen $\bigwedge(s,\chi) = L_\infty(s,\chi) \cdot L(s,\chi)$.

0.2 Reinterpretation der Dirichletschen L-Funktionen.
Die primen Restklassengruppen als Strahlklassengruppen für $\mathbb{Q}$. Dirichletcharaktere als Spezialfall von Charakteren der Idelklassengruppe. Die Heckeschen L-Reihen.

0.3 Haar-Maße auf lokal kompakten Gruppen.
Borelmaße auf einem topologischen Raum. Das Links-Haar-Maß und das induzierte Integral auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

0.4 Der Darstellungssatz von Riesz für lokal kompakte Hausdorff-Räume.

0.5 Der Absolutbetrag (Modul) für die Autonmorphismen einer lokal kompakten topologischen Gruppe.

0.6 Die Charaktergruppe einer lokal kompakten abelschen Gruppe (LKA).
Die Topologie auf $\widehat{G}$.

0.7 Die Fouriertransformation.
Die Banachräume $L^1(G,\mu)$ und $L^\infty(G,\mu)$. Wenn G eine LKA ist, dann ist die Fouriertransformation $f \in L^1(G,\mu) \mapsto \hat{f} \in L^\infty(\widehat{G},\widehat{\mu})$ ein Ringhomomorphismus.

0.8 Das duale Maß und die Inversionsformel.

0.9 Pontrjagin-Dualität.

0.10 Klassifizierung der lokal kompakten Körper. Die ausgezeichneten Absolutbeträge.

0.11 Globale Körper.
Algebraische Zahlkörper und Funktionenkörper. Stellenmengen und der Adelering als lokal kompakter topologischer Ring. Idele, Idelklassengruppen, Selbstdualität für den Adelering.

0.12 Quasicharaktere der Ideleklassengruppe aufgefaßt als eine Verallgemeinerung von $\mathbb{C}$ (Riemannsche Fläche).

0.13 Die Hauptsätze.
Zeta-Integrale $\mathcal{Z}(f,\chi)$ enstehen durch Integration von Funktionen auf dem Adelering gegen Quasicharaktere der Idelklassengruppe.
Satz von Tate: Die Funktionalgleichung für Zeta-Integrale. Die Dirichletschen L-Reihen lassen sich durch geeignete Spezialisierung von f als Zeta-Integrale schreiben: $\bigwedge(\chi) = \mathcal{Z}(f_\chi,\chi)$. Von der Tate'schen Funktionalgleichung zurück zur klassischen Funktionalgleichung.

1 Topologische Gruppen und Haar-Maß

1.1 Topologische Räume und Gruppen G.
Die Translationen in G sind Hmöomorphismen. Deshalb ist G ein homogener Raum. Funktionen auf G und ihre Translationen. Kompakter Träger impliziert uniforme Stetigkeit. Trennungseigenschaften. Die Quotiententopologie. Nebenklassenräume sind homogene topologische Räume. Die Projektionsabbildung ist offene Abbildung und bei kompakter Untergruppe auch abgeschlossene Abbildung, abgeschlossen $\cdot$ kompakt $=$ abgeschlossen.
Lokal kompakte topologische Räume und Gruppen. Hausdorffsch impliziert, dass kompakte Mengen abgeschlossen sind. Diskrete Untergruppen sind abgeschlossen. Satz von Urysohn zur Existenz stetiger Funktionen $f : X \to [0,1]$. Existenz von Funktionen $\chi_K \leq f \leq \chi_U$.

1.2 Das Haar-Integral.
Die Haarsche Deckelungsfunktion $f,g \to (f;g) \in \mathbb{R}_+$ und ihre Eigenschaften. Die Funktionale $I_\varphi(f)$. Für „kleines“ φ ist $f \mapsto I_\varphi(f)$ beinahe additiv. Existenz linksinvarianter Integrale auf $\mathcal{C}_c(G,\mathbb{R})$. Der Eindeutigkeitssatz. Integrale und Maße . Jedes Maß bestimmt ein Integral und umgekehrt (Satz von Riesz) bestimmt jedes Integral ein Maß. Das Haar-Maß als reguläres Borelmaß, zu dem zuvor konstruierten Integral. Für Funktionen f auf G, stetig mit kompaktem Träger,nicht negativ und reellwertig, ist das Haar-Integral $I(f) \neq 0$ falls $f \neq 0$. G ist kompakt gdw. $\mu(G) < \infty$. Oft normiert man dann : $\mu(G) = 1$. Die Modularfunktion $\Delta = \Delta(t)$ auf G, sodass für Rechtstranslation $I(f^t) = \Delta(t) \cdot I(f)$. Dies ist ein Quasi-Charakter $\Delta : G \to (\mathbb{R}_+)^\times$, also auf jeder kompakten Untergruppe trivial. $\int f(x^{-1})\Delta(x^{-1}) = \int f(x)$. Unimodulare Gruppen.

1.3 Die Banach-Algebra $L^1(G)$.
$\mathcal{L}^1(X,\mathcal{B},\mu,\mathbb{R}) :=$ summierbare Funktionen auf dem lokal kompakten Hausdorff-Raum (= LKH) X. f summierbar gdw. $|f|$ summierbar und $|\int f| \leq \int |f|$. Damit hat man die L^1-Norm $\|f\|_1 := \int |f| d\mu$ für $f \in \mathcal{L}^1$. Allgemeiner $\mathcal{L}^p$ für $p \geq 1$ und L^p ist $\mathcal{L}^p$ modulo dem Unterraum der Funktionen mit L^p-Norm $= 0$. Die Räume L^p sind Banach-Räume.

Für $p, q \in [1,\infty]$ und $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ gilt die Hölder-Ungleichung $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, falls $f \in \mathcal{L}^p, \quad g \in \mathcal{L}^q$.
Für Haar-Maß μ auf LKH G ist $L^\infty(G) \xrightarrow{\sim} L^1(G)^*$. I.a. ist diese Abbildung zwar injektiv (Isometrie), aber nicht surjektiv (vgl. Donald L. Cohn).
$\mathcal{C}_c(G)$ ist in allen Räumen $L^p(G)$ enthalten. Definition der Faltung auf $\mathcal{C}_c(G)$. Setzt sich stetig fort auf $L^1(G)$, weil $\mathcal{C}_c(X)$ dicht in $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ für alle $p \in [1,\infty)$. Damit ist $L^1(G)$ eine Banach-Algebra mit stetiger Involution$f \mapsto f^*$ und $(f*g)^* = g^* * f^*$. Eigenschaften von $L^1(G)$: Ist kommutativ gdw. G kommutativ, hat Einselement gdw. G diskret ist. Approximative Eins, Satz von Fubini, Kriterium für Links- bzw. Rechtsideal.

1.4 Die Fouriertransformierte.
Sei G = LKA mit Haar-Maß μ. Ziel ist die Etablierung von $f \in L^1(G) \mapsto \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\widehat{G})$. Anstelle von $L^1(G)$ betrachtet man zuerst eine beliebige kommutative Banach-Algebra A und die allgemeine Fouriertransformierte $x \in A \mapsto ev_x \in \mathcal{C}^0(\Delta)$, wobei $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}-\mathrm{alg}}(A,\mathbb{C})^\times$.
Gelfand: $h \in \Delta \mapsto \mathrm{Ker}\ h \in \mathrm{Spec}_r(A)$ ist eine Bijektion auf die Menge der regulären Maximalidelale von A. Im Fall $A = L^1(G)$ bekommt man Bijektion $h \in \Delta \mapsto \alpha_h \in \widehat{G}$ mit der Umkehrabbildung $\alpha \in \widehat{G} \mapsto h_\alpha \in \Delta$ und die Fouriertransformierte $f \mapsto \hat{f}$ ist mit $\hat{f}(\alpha) = ev_f(h_\alpha) = h_\alpha(f)$ ein Spezialfall der allgemeinen Fouriertransformierten (vgl. Übungen 1, 2 aus Serie 4). Die kompakt-offen Topologie auf $\widehat{G}$ ist dasselbe wie die durch die Bijektion $\Delta \leftrightarrow \widehat{G}$ induzierte schwache Topologie auf $\widehat{G}$. Deshalb ist $\widehat{G}$ lokal kompakt in der KO-Topologie, weil dies für die schwache Topologie gilt. Wenn G diskret, dann hat $L^1(G)$ eine 1. Deshalb ist dann $\Delta \leftrightarrow \widehat{G}$ kompakt.

2 Lokal kompakte Körper

Klassifizierung der *lokal kompakten Körper* K, welche *nicht diskret* sind. Die Hauptrolle spielt dabei die durch das Haar-Maß μ auf $(K,+)$ induzierte betrags„artige" Funktion $x \in K \mapsto \quad \mathrm{mod}_K(x) = \frac{\mu(xU)}{\mu(U)}$.

2.1 Der Modul eines Automorphismus.
Für G = LKA und $\lambda \in \mathrm{Aut}(G)$ ist $\mathrm{mod}_G(\lambda) \in (\mathbb{R}_+)^\times$ definiert. Im Fall $G = (K,+)$ bekommt man $\mathrm{mod}_K : K^\times \to (\mathbb{R}_+)^\times$, stetiger Homomorphismus. K ist nicht kompakt und $B_m = \{a \in K;\ \mathrm{mod}_K(a) \le m\}$ ist kompakt. Diskrete Teilkörper von K müssen endlich sein. Die Mengen B_m bilden eine Basis kompakter Umgebungen von $0 \in K$. mod_K ist offener Homomorphismus von $K^\times$ auf eine abgeschlossene Untergruppe $\Gamma \subset (\mathbb{R}_+)^\times$. Eigenschaften von $\mathrm{mod}_K(x+y)$. Spezialfall der ultrametrischen Ungleichung.

2.2 Klassifizierung der LKK (Beginn).
Hilfssatz über gewisse Funktionen F auf $\mathbb{N}$. Der Spezialfall $F_K(m) := \quad \mathrm{mod}_K(m \cdot 1_K)$. Ist das beschränkt, dann ist mod_K ultrametrisch. Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ und Vervollständigungen . Genaue Bestimmung von $F_K(m)$ für lokal kompakte Körper K. Die Fälle $\mathrm{char}(K) = p > 1$, $\mathrm{char}(K) = 0$ liefern unterschiedliches Ergebnis. Sei $\mathrm{char}(K) = 0$. Dann ist der Abschluß von $\mathbb{Q}$ in K gleich einem $\mathbb{Q}_v$.

Definition: *Ein lokal kompakter Körper K heißt p-Körper, wenn es eine (eindeutig bestimmte) Primzahl p mit* $\mathrm{mod}_K(p \cdot 1_K) < 1$ *gibt.*

2.3 Topologische Vektorräume über LKK und Ende der Klassifikation. Untersuchung der p-Körper.
Im Fall $\mathrm{char}(K) = 0$ hat man $K \supseteq \mathbb{Q}_v$. Daraus möchte man schließen, dass $K|\mathbb{Q}_v$ endlichdimensional und $\mathrm{mod}_K(x) = \mathrm{mod}_{\mathbb{Q}_v}(x)^{[K:\mathbb{Q}_v]}$ sein muß für $x \in \mathbb{Q}_v$. Dazu betrachtet man die topologischen Vektorräume V über einem lokal kompakten Körper K. Endlichdimensionale Teilräume sind dann lokal kompakt. Ist V selbst lokal kompakt, dann muss es endlichdimensional sein und $\mathrm{mod}_V(a) = \mathrm{mod}_K(a)^{\dim V}$ für alle $a \in K$. Hilfssatz über die Haar-Maße für drei LKA $G'' = G/G'$. Für p-Körper K hat man $\mathrm{char}(K) = p$ oder $K|\mathbb{Q}_p$ endlich dimensional. Die p-Körper sind genau diejenigen lokal kompakten Körper, welche nichtarchimedisch (= ultrametrisch) bewertet sind. Der Bewertungsring O_K ist eindeutig bestimmter maximaler kompakter Teilring von K. O_K ist diskreter Bewertungsring und der Restkörper $O_K/\mathfrak{p}_K$ muss endlich sein. $q = |O_K/\mathfrak{p}_K|$ heißt der Modul von K und es gilt $\mathrm{mod}_K(a) = q^{-v_K(a)}$ für alle $a \in K$. Reihenentwicklung der Elemente von K. Konstruktion der Gruppe $M^\times$ aller Enheitswurzeln aus K, welche zu p prime Ordnung haben. Falls $\mathrm{char}(K) = p$, dann ist $M = M^\times \cup \{0\}$ der algebraische Abschluß von $\mathbb{F}_p$ in K. Und es gilt: $K \cong M((X))$ ist Potenzreihenkörper in einer Variablen über dem endlichen Konstantenkörper $M \cong O_K/\mathfrak{p}_K$.

2.4 Dualität über lokalen Körpern.
Sei G = LKA. G ist diskret gdw. $\widehat{G}$ kompakt. Pontrjagin-Dualität (ohne Beweis): $x \in G \mapsto ev_x \in \widehat{\widehat{G}}$ ist natürlicher Isomorphismus topologischer Gruppen zwischen G und $\widehat{\widehat{G}}$. Es folgt dann: G kompakt gdw. $\widehat{G}$ diskret. Für abgeschlossene Untergruppen $H \subset G$ setze $H^\perp := (G/H)^\wedge$. $H^\perp$ ist abgeschlossene Untergruppe von $\widehat{G}$ und $\widehat{G}/H^\perp \cong \widehat{H}$. Das Lemma 2.4.5 über Eigenschaften von $H^\perp$ im Verhältnis zu H. Sei V = lokal kompakter Vektorraum über dem lokal kompakten Körper K: Sei ψ nichttrivialer Charakter von K^+. Dann ist $\varphi \in V^* \mapsto \psi \circ \varphi \in \widehat{V}$ Isomorphismus zwischen dem algebraischen und dem topologischen Dual von V als K-Rechtsräume.

3 Globale Körper

3.1 Globale Körper und ihre Vervollständigungen
Definition globaler Körper k. Primstelle von k := Äquivalenzklasse von Vervollständigungen; reell, komplex, unendlich, endlich. Zu jeder Primstelle v gehört eindeutig $||_v$ auf k und die ausgezeichnete Vervollständigung k_v. Einbettungen globaler Körper in lokale. $k'|k$ endlicheErweiterung globaler Körper. Dann bestimmt jede Primstelle w von k' eindeutig eine darunter liegende Primstelle v von k. Man schreibt $w|v$ und sagt w teilt v (w kann nur eine einzige Primstelle v von k teilen). Umgekehrt gibt es zu fixiertem v höchstens endlich viele $w|v$. Genauer gilt: $k_v \otimes_k k' \cong \prod_{w|v} k'_w$, $[k' : k] = \sum_{w|v} [k'_w : k_v]$.
(Das folgt aus der VL Algebraische Zahlentheorie.) Deshalb hat ein globaler Körper höchstens eine endliche Zahl von unendlichen Primstellen. Das Beispiel $\mathbb{F}_q(X)$.

3.2 Adele.

Globaler Körper k, endliche Menge S von Primstellen mit $S \supset S_\infty$. $\mathbb{A}_k(S)$ mit Produkttopologie ist lokal kompakt. $\mathbb{A}_k := \cup_S \mathbb{A}_k(S)$ ist wohldefiniert und ebenfalls lokal kompakt. Die $\mathbb{A}_k(S)$ sind offene Teilringe in $\mathbb{A}_k$. Die Elemente von $\mathbb{A}_k$ heißen Adele. Abbildungen $\iota_v : k_v \to \mathbb{A}_k$ und $pr_v : \mathbb{A}_k \to k_v$. $\mathbb{A}_k$ homöomorph zum direkten Produkt von $\mathrm{Ker}(pr_v)$ und $\mathcal{I}m(\iota_v)$. Additive Charaktere auf $\mathbb{A}_k$. Diagonale Einbettung von k in $\mathbb{A}_k$. Basen von endlichdimensionalen Vektorräumen bzw. Algebren über globalem Körper k und ihr Verhalten bei „Lokalisierung". Jeder endlichdimensionale Vektorraum $E|k$ hat Lokalisierungen $E_v := E \otimes_k k_v$ und Adelisierung $E_{\mathbb{A}} := E \otimes \mathbb{A}_k$. Die Topologie auf E_v und $E_{\mathbb{A}}$. $E_{\mathbb{A}}$ ist Vereinigung der offenen Untergruppen $E_{\mathbb{A}}(S, \mathcal{E})$ für jedes fixierte <u>endliche</u> Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ von $E|k$. $E_{\mathbb{A}}$ ist lokal kompakt und kompakte Teilmengen sind stets in $E_{\mathbb{A}}(S, \mathcal{E})$ für geeignetes S. Im Algebrenfall ist $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}$ Vereinigung offener Teilringe. Die Identifizierung $(k'|k)_{\mathbb{A}} \cong \mathbb{A}_{k'}$ für endliche separable Erweiterungen globaler Körper. Die Einbettung $\mathbb{A}_k \to \mathbb{A}_{k'}$. Der Isomorphismus $(E|k)_{\mathbb{A}} \cong (E|k')_{\mathbb{A}}$.

3.3 Die Hauptsätze über Adele.

Für endlichdimensionale Vektorräume E über globalem Körper k ist E diskret in $E_{\mathbb{A}}$ und die Faktorgruppe $(E_{\mathbb{A}}/E, +)$ ist kompakt. Sei $\psi \in (\mathbb{A}_k/k, +)^\wedge$ nichttrivialer Charakter. Dann ist $(E^*)_{\mathbb{A}} \xrightarrow{\sim} (E_{\mathbb{A}})^\wedge$, $v^* \mapsto \{v \mapsto \psi(v^*(v))\}$ ein Isomorphismus topologischer Gruppen. Dabei wird E^* auf $E^\perp = (E_{\mathbb{A}}/E)^\wedge$ abgebildet. Im Fall $E = k$ ist also $\mathbb{A}_k \cong \mathbb{A}_k^\wedge$ vermittels $y \mapsto \psi_y = \{x \mapsto \psi(xy)\}$ und $k \cong k^\perp = (\mathbb{A}_k/k)^\wedge$.

Folgerung: (i) Für alle v ist $\psi_v = \psi \circ \iota_v$ nichttrivial und (ii) für fast alle v ist $\psi_v(O_v) \equiv 1$, $\psi_v(\mathfrak{p}_v^{-1}) \not\equiv 1$. Außerdem ist $E + E_v$ dicht in $E_{\mathbb{A}}$ für alle Primstellen v (wegen (i)). Für Erzeugendensysteme $\mathcal{E}, \mathcal{E}^*$ von E bzw. E^* gilt $(\mathcal{E}^*)_v \cong (\mathcal{E}_v)^\perp$ vermittels ψ_v für fast alle v.

3.4 Idele.

$\mathcal{A}|k$ endlichdimensionale Algebra über globalem Körper. Dann ist $\mathcal{A}_v^\times$ offen in $\mathcal{A}_v$ und bezüglich der induzierten Topologie eine lokal kompakte topologische Gruppe. Jedoch in $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times \subset \mathcal{A}_{\mathbb{A}}$ muss die Inversenbildung bezüglich der induzierten Topologie nicht stetig sein. Beispiel $\mathcal{A} = k$. Man nimmt auf $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times$ die schwächste Topologie, sodass die Inversenbildung stetig wird. $\mathcal{A}^\times$ ist diskret in $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times$. Für genügend großes S ist $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}(S, \alpha)^\times$ mit Produkttopologie offen in $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times$ und $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times$ ist die Vereinigung solcher Gruppen. Die Elemente von $\mathcal{A}_{\mathbb{A}}^\times$ heißen $\mathcal{A}$-Idele. Der Absolutbetrag $|x|_{\mathbb{A}}$ für Idele $x \in \mathbb{A}_k^\times$. Interpretation: $|x|_{\mathbb{A}} = \mathrm{mod}_{\mathbb{A}_k}(\lambda_x)$. Produktformel. $\mathbb{A}_k^1/k^\times$ ist kompakt. Die Zerlegung der Ideleklassen $\mathbb{A}_k^\times/k^\times = \mathbb{A}_k^1/k^\times \times M$. Unterschiede im Funktionenkörper- und im Zahlkörperfall.

4 Zetafunktionen globaler Körper

4.1 Fouriertransformierte und Standardfunktionen

1. Fouriertransformierte und Gruppenautomorphismen. 2. Fourier-Inversionsformel, duales Maß, $(c\mu)^\wedge = c^{-1}\widehat{\mu}$. 3. Selbstduale Gruppen und selbstduales Maß. 4. Volumen-1-Maß ist dual zu Punkt-1-Maß. 5. Zulässige Funktionen, d.h. die Fourier-Inversion ist ausführbar. Wenn Γ Gitter in G (= LKA), dann ist $\Gamma^\perp$ Gitter in $\widehat{G}$. Zulässige Funktionen bezüglich (G, Γ). 6. Die Poisson-Summenformel: Wenn f auf G zulässig ist bezüglich Γ, dann $\Sigma_\gamma f(g + \gamma) = \Sigma_{\gamma^*} \hat{f}(\gamma^*) \cdot \gamma^*(-g)$. Insbesondere der Fall $g = 0 \in G$. Allgemein hat man Poisson-Formel für abgeschlossene Untergruppen $H \subset G$. 7. Das

Maß μ für (G, Γ) und das duale Maß $\widehat{\mu}$ für $(\widehat{G}, \Gamma^\perp)$. 8. Der selbstduale Fall $G \cong \widehat{G}$ mit $\Gamma \cong \Gamma^\perp$. 9. Lokal konstante Funktionen. 10. Standardfunktionen auf E, wenn E endlichdimensionaler Vektorraum über einem p-Körper K ist (= lokalkonstant mit kompaktem Träger). 11. Kriterium für Standardfunktionen, die Fouriertransformierte ist wieder eine Standardfunktion. 12. Standardfunktionen sind zulässig. Die Fouriertransformierte einer charakteristischen Funktion im Fall $E = K$. 13. Standardfunktionen f auf $\mathbb{R}$-Vektrorräumen E. 14. $\hat{f}$ ist wieder Standardfunktion und f ist (E, L) zulässig für beliebiges Gitter L. Die Reduktion auf den Fall $(E, L) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n)$. 15. Adelische Standardfunktionen ϕ auf $E_{\mathbb{A}} = E \otimes_k \mathbb{A}_k$. 16. Der Träger von ϕ liegt stets in einem $E_{\mathbb{A}}(S, \mathcal{E})$. 17. Das Haar-Maß auf $(E_{\mathbb{A}}, +)$. Kohärente Systeme $\{\mu_v\}_v$ von Haar-Maßen. 18. Hauptsatz: Die Fouriertransformierte einer adelischen Standardfunktion f auf $E_{\mathbb{A}}$. f ist zulässig für $(E_{\mathbb{A}}, E)$.

4.2 Quasicharaktere.
Quasicharaktere einer lokal kompakten Gruppe G.
Insbesondere werden dann die Fälle $G = K^\times$ für lokalen Körper K und $G = C_k := \mathbb{A}_k^\times / k^\times$ für globalen Körper k untersucht. Faktorisierung der Quasicharaktere von C_k in lokale Faktoren. Unverzweigte Quasicharaktere. Äquivalenzrelationen auf $X(G)$, Zerlegung in Zusammenhangskomponenten (= Äquivalenzklassen) und komplexe Struktur auf $X(G)$. Der Realteil eines Quasicharakters. Für $\chi \in X(C_k)$ haben alle lokalen Faktoren denselben Realteil wie χ.

4.3 Zeta-Integrale.
1. Das Zeta-Integral $\mathcal{Z}(w, f)$ einer Standardfunktion f auf $\mathbb{A}_k$ gegen einen Quasicharakter w der Ideleklassengruppe C_k. 2. Das Haar-Maß auf $\mathbb{A}_k^\times$. 4. Zeta-Integrale als komplexe Funktionen. 5. Zerlegung von Zeta-Integralen in lokale Faktoren und Konvergenz von $\mathcal{Z}(w, f)$ für $\sigma = Re(w) > 1$.

4.4 Die Funktionalgleichung für Zeta-Integrale.
1. Fixierung eines Haar-Maßes auf $\mathbb{A}_k^\times$. 2. Der Faktor N der Idelklassengruppe C_k und Untersuchung von („Zetafunktionen") $\lambda(s, F_1)$, die zum Faktor N gehören. 3. Das Tamagawa-Maß auf $(\mathbb{A}_k, +)$ und seine (nichteindeutige) Faktorisierung. 4. Hauptsatz: Funktionalgleichung für Zeta-Integrale $\mathcal{Z}(w, f)$. Man nimmt eine Aufteilung $\mathcal{Z}(w, f) = (\mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_0') + (\mathcal{Z}_1 - \mathcal{Z}_0')$ vor. Der zweite Term tritt nur für unverzweigte Quaischaraktere w auf und kann mit Hilfe von 2. behandelt werden. Der erste Term ist holomorph auf ganz $X(C_k)$. Die Funktionalgleichung gilt termweise.

4.5 L-Funktionen in der Zahlentheorie.
Bildung der adelischen Standardfunktion ϕ_w zu einem Quasicharakter $w \in X(C_k)$. Die Funktion ϕ_w hängt nur ab von der Äquivalenzklasse von w. Die Fouriertransformierte $(\phi_w)'$. Die Funktionalgleichung für $\mathcal{Z}(w, \phi_w)$. Darstellung dieser Funktionen als ein Eulerprodukt und Reinterpretation der Funktionalgleichung. Die L-Funktionen von Zahlkörpern.