SEMINARBERICHTE

I / II

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
SEKTION MATHEMATIK

I / II

Seminarbericht Nr. 14

Dr. Rolf-Peter Holzapfel
Arithmetische Kugelquotientenflächen I, II
I Über die Regularität arithmetischer Kugelquotientenflächen
II Klassifikation von Kugelspitzen- und Kugelquotientensingularitäten

Berlin, den 18. 9. 1978

Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität zu Berlin
1086 Berlin
PSF 1297
Deutsche Demokratische Republik

inleitung

ie Einleitung soll eine Übersicht über bisherige Ergebnisse ber Kugelquotientenflächen geben und die Arbeit des Autors inordnen. Sei

$$B^n = \{(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n;\ |z_1|^2+\dots+|z_n|^2 < 1\}$$

ie komplexe Einheitskugel. B^n ist ein homogenes (symmetri- ches) beschränktes Gebiet des $\mathbb{C}^n$ mit der Gruppe biholomor- her Automorphismen $\mathbb{P}U(\Phi,\mathbb{C}) = SU(\Phi,\mathbb{C})/\text{Zentrum}$, wobei Φ ie $(n+1)\times(n+1)$-Matrix

$$\Phi = \operatorname{diag}(1,1,\dots,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

st. Wir können identifizieren

$$B^n = SU(\Phi,\mathbb{C})/S(U(2)\times U(1)),$$

bei $S(U(2)\times U(1))$ maximale kompakte Untergruppe, nämlich die tationäre Untergruppe von $SU(\Phi,\mathbb{C})$ im Punkte $0 \in B^n$ ist (Hel- ason, [19] , Kap. IX, Typ A III).

st $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d quadratfreie natürliche Zahl, ein imaginär- adratischer Zahlkörper, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen algebrai- hen Zahlen in K, so definiert $SU(\Phi,K)$ mit Hilfe der Zerle- ung $K = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\eta$, wobei $1,\eta$ Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}$ ist, eine er $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Gruppe $\underline{G}^{(d)}$, und wir haben

$$\underline{G}^{(d)}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi,\mathbb{C})\ ,\ \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Q}} = SU(\Phi,K)\ ,\ \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Z}} = SU(\Phi,\mathcal{O}).$$

ithmetische Untergruppen des Typs $U(\Phi,\mathcal{O})$ traten wohl zum sten Mal in Zusammenhang mit der Wirkung auf die Kugel bei card auf und zwar bei der Parametrisierung biregulärer Äqui- lenzklassen von Kurven eines bestimmten Typs mit Hilfe des ter Gruppen wurde die Vermutung widerlegt. Andere Gegenbeispiele sind meines Wissens bisher nicht bekannt.

Wie Miyaoka in [36] nach Vorarbeit von van de Ven ([50]) und Bogomolov zeigte, ist (1) eine extremale Eigenschaft für Flächen, nämlich es gilt für jede Fläche X $(K_X^2)/e(X) \leq 3$ ([36]). Interessanterweise wurde kürzlich von Yau folgende Umkehrung der Aussage (1) bewiesen (ich entnehme dies einem Vortrag, den Herr Prof. Kurke in einem Seminar an der Berliner Humboldt-Universität hielt):

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ und B^2/Γ mit frei und uniform wirkender diskreter Untergruppe Γ von $\mathbb{P}U(\phi, \mathbb{C})$ erschöpfen alle Flächen X mit

$$(K_X^2) = 3e(X) > 0 .$$

Dieses Ergebnis ist ein interessanter Spezialfall der Uniformisierungstheorie. Allgemein ist für die Uniformisierungstheorie algebraischer Mannigfaltigkeiten das lokale Uniformisierungstheorem von Griffiths ([16]) bekannt:

Jede glatte projektive algebraische Mannigfaltigkeit läßt sich in jedem Punkt Zariski-lokal (d.h. nach Weglassen einer echten algebraischen Untermannigfaltigkeit außerhalb des Punktes) durch einen beschränkten Holomorphiebereich des $\mathbb{C}^n$, der homöomorph zu B^n ist, uniformisieren.

Für den Fall n = 2 bieten sich die beiden (bis auf Biholomorphie einzigen) zusammenhängenden homogenen beschränkten Gebiete B^2 und $B^1 \times B^1 = H \times H$, wobei H die obere Siegelsche Halbebene ist, an als einfachste Fälle für die zur lokalen Uniformisierung entgegengesetzten Problematik der Untersuchung

von Kompaktifizierungen von Quotientenräumen B/Γ. Für die Hilbertsche modulare Gruppe $\Gamma = Sl_2(\mathcal{O}_k)$, k ein total reeller Zahlkörper vom Absolutgrad n, die auf H^n wirkt, und zu ihr kommensurable Gruppen liegen bereits umfangreiche Ergebnisse vor, speziell Flächenklassifizierungsresultate für n = 2. Eine Übersicht der Entwicklung in dieser Richtung und weitere zentrale Resultate (bis 1973) findet man bei Hirzebruch ([24]). Darüber hinaus sei für weitere Ergebnisse für Hilbertsche Modulflächen auf [25], [26], [13] (Kongruenzuntergruppen) verwiesen.

Sei nun n = 2, Γ eine diskrete Untergruppe von $G = SU(\phi, \mathbb{C})$. Γ heißt Gitter, wenn G/Γ ein G-invariantes Maß μ besitzt, so daß $\mu(G/\Gamma)$ endlich ist. B^2/Γ hat dann ebenfalls endliches Volumen (genauer ein Γ- Fundamentalbereich in B^2). Im Falle, daß Γ $\mathbb{Q}$-arithmetisch ist wie z.B. $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}^{(d)}$, ist Γ ein Gitter (Borel [4], Korollar 13.2). Bei der Kompaktifizierung von B^2/Γ richten wir uns nach Pjatezkij-Shapiro [39], der sie in besonders handlicher Weise für Kugelquotienten angegeben hat. Für $\mathbb{Q}$-arithmetische Γ erhalten wir in der Tat durch Hinzunahme endlich vieler Punkte zu B^2/Γ eine kompakte Fläche $\widehat{B^2/\Gamma}$ wie Borel ([4], Satz 17.9) durch Konstruktion Siegelscher Fundamentalmengen zeigte.

Die Kompaktifizierungspunkte sind im allgemeinen Singularitäten (Kugelspitzensingularitäten) von $\widehat{B^2/\Gamma}$. Besteht die stationäre Untergruppe Γ_κ von Γ eines für die Kompaktifizierung verwendeten Γ-rationalen Randpunktes (Γ-Spitze) $\kappa \in B^2$ nur aus unipotenten Elementen, so kann man mit Hilfe eines anderen Kompaktifizierungsprozesses, der auf L.Cohn zurückgeht, zeigen, daß κ eine Singularität liefert, deren minimale Auflösung eine elliptische Kurve ist. Die Konstruktion solcher kompaktifizierender elliptischer Kurven findet man bei Hemperly ([20], §2).

Für die Gruppe $\Gamma = \underline{G}^{(1)}_{\mathbb{Z}}$ konnte Schwartzmann in [42] zeigen, daß B^2/Γ mit Hilfe eines Punktes kompaktifiziert wird, der regulär ist (siehe auch [43], [44]). Schwartzmann übertrug dazu einen ursprünglich auf Chevalley ([8]) zurückgehenden und von Gottschling allgemeiner formulierten Satz auf Spitzensingularitäten von Kugelquotienten. Gottschlings Satz besagt, daß ein regulärer Punkt x eines komplexen Raumes D bei der Faktorisierung nach einer eigentlich diskontinuierlich wirkenden Gruppe Γ von biholomorphen Abbildungen von D auf sich einen regulären Punkt in D/Γ genau dann liefert, wenn die stationäre Gruppe Γ_x durch Spiegelungen erzeugt wird ([15], Satz 2; siehe auch Prill [40], Korollar zu Theorem 2).

Denselben Sachverhalt wie für $\underline{G}^{(1)}_{\mathbb{Z}}$ konnte Feustel für $\Gamma = U(\Phi, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})})$ nachweisen, während er für $\underline{G}^{(3)}_{\mathbb{Z}}$ zeigen konnte, daß die Spitzen genau eine Singularität liefern ([10]), deren Typ inzwischen bekannt ist (Quotientensingularität der Quaternionengruppe, siehe I.9 der vorliegenden Arbeit).

Wirkt die Gruppe Γ frei und sind die stationären Untergruppen Γ_κ der Γ-rationalen Randpunkte κ unipotent, dann kann man, wenn das Volumen des Fundamentalbereiches von Γ in B^2 bzgl. der Euler-Chern-Form von B^2 bekannt ist, nach Hemperly ([20]) folgende Daten der minimalen Singularitätenauflösung $X = \overline{B^2/\Gamma}$ von $\widehat{B^2/\Gamma}$ ermitteln:

die Eulerzahl $e(X)$,

den Selbstschnittindex (K_X^2) der kanonischen Klasse,

das Polynom $P_\Gamma(r)$ in r mit der Eigenschaft: es existiert ein

$m \in \mathbb{N}$, so daß $P_\Gamma(r) = \dim [\Gamma,r]_0$ für $r \equiv 0 \bmod m$,

wobei $[\Gamma,r]_0$ den Raum der Γ-Spitzenformen vom Gewicht $r>0$ bezeichnet. Das Resultat läßt sich verallgemeinern auf Gitter Γ, deren Elemente höchstens isolierte Fixpunkte haben[8]. Die Beziehung der drei Daten untereinander wurde für Hilbertsche Modulflächen von Hammond in [17] behandelt und läßt sich für die ebengenannten Gitter auf Kugelquotienten übertragen.

In den Fällen, in denen Spiegelungen auftreten, ist die Situation wesentlich komplizierter. Für uniforme Gruppen Γ hat Hirzebruch mit Hilfe eines Satzes der equivarianten K-Theorie von Atiyah-Segal-Singer $\dim [\Gamma,r]$ für $r \geq 2$, ausgedrückt durch die Eulerzahlen der Kurven der Quotientenfläche, die Quotienten der Fixpunktscheiben der Spiegelungen sind, bestimmen können ([23]). Ähnlich gelang das vorher Langlands mit Hilfe der Selbergschen Spurformel ([32]). Für nichtuniforme Gruppen, die Spiegelungen enthalten, ist hierüber näheres nur für ein von L. Cohn in [9] behandeltes Beispiel bekannt. Die Berechnung der Eulerzahl zusammen mit der Bestimmung des Volumens des Fundamentalbereiches gelang bisher nur Schwartzmann für $\Gamma = \underline{G}^{(1)}_{\mathbb{Z}}$ ([42], [44]).

Im Kapitel I der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Grundlagen der Kugelquotientenbildung nach $\mathbb{Q}$-arithmetischen Gruppen zusammen mit der Kompaktifizierungstheorie zusammengestellt. Dann werden die Spitzensingularitäten der arithmetischen Gruppen $\Gamma = \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Z}}$ und von deren Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma($

gezeigt, daß

weder vom ob

sind, und fü

der beiden T

zeigt, daß e

kompaktifizi

und in spezi

es Schwartzm

Das Probl

tenräumen sy

toren behand

Kazdan [30] ;

ten Flächen ;

$\mathbb{R}$-Rang 1 un

Bei den H

blen Gruppen

tenfläche (F

de Ven [25];

dort natürli

Für die Kugel

reichend viel

wesentlich zu

che nach eine

ist, daß das

auf die Fläch

nicht regulär

auszusprechen, der als Betreuer bei meinem Zusatzstudium in Leningrad mein Interesse auf den Problemkreis der Quotienten symmetrischer Gebiete lenkte.

I. ÜBER DIE REGULARITÄT ARITHMETISCHER KUGELQUOTIENTENFLÄCHEN

I.1 Das Siegelgebiet D 2. Art und B^2 als Projektionen aus hermiteschen Räumen

$D = \{(z,u) \in \mathbb{C}^2;\ 2\operatorname{Im} z - |u|^2 > 0$ ist ein Siegel-Gebiet 2. Art (Pjatezkij-Shapiro [39], Kap. I, § 2). Sei $[\mathbb{C}^3, \Psi]$ der Vektorraum $\mathbb{C}^3$, versehen mit der hermiteschen Form, die mit Hilfe der kanonischen Basis durch die Matrix

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}$$

definiert wird. Die Einbettungen

$$D \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \mathbb{P}\mathbb{C}^3$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

liefern das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^3 \setminus \{o\} \arrow[r, "\mathbb{P}"] & \mathbb{P}\mathbb{C}^3 \\ \mathbb{P}^{-1}D \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & D \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

und es gilt mit dem in $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ gebildeten Rand ∂D von D

$$\mathbb{P}^{-1}D = \{\mathcal{J} \in [\mathbb{C}^3, \Psi];\ \mathcal{J}^2 < 0\},$$

$$\mathbb{P}^{-1}(\partial D) = \{\mathcal{J} \in [\mathbb{C}^3, \Psi];\ \mathcal{J}^2 = 0\}, \text{ mit } \mathcal{J}^2 = \langle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle_\Psi,$$

analog für die Kugel B^2 mit $\Phi = \operatorname{diag}(1,1,-1)$

$$\mathbb{P}^{-1}B^2 = \{\mathcal{b} \in [\mathbb{C}^3, \Phi];\ \mathcal{b}^2 < 0\},$$

$$\mathbb{P}^{-1}(\partial B^2) = \{\mathcal{b} \in [\mathbb{C}^3, \Phi];\ \mathcal{b}^2 = 0\} \quad \text{mit } \mathcal{b}^2 = \langle \mathcal{b}, \mathcal{b} \rangle_\Phi .$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & (\mathrm{diag}(\omega,\omega,\omega)) \arrow[r] \arrow[d, "\shortparallel"] & SU(\Phi,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr", "T^{-1}\square T"'] & \mathrm{Aut}_{hol} B^2 \arrow[r] \arrow[d, "\wr", "\tau^{-1}\square\tau"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & (\mathrm{diag}(\omega,\omega,\omega)) \arrow[r] & SU(\Psi,\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_{hol} D \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

I.4 Iwasawa-Zerlegung, $\mathbb{Q}$- und $\mathbb{R}$-Rang

In den folgenden Punkten werden Sätze von Borel, Tits [6], Borel [4] und Raghunathan [41] benutzt. Eine gute zusammenfassende Übersicht der Ergebnisse der erstgenannten Arbeit ist in [41], Kap. XII enthalten.

$\underline{G}$ sei halbeinfache algebraische Gruppe, definiert über dem Körper F (kurz algebraische F-Gruppe). Der F-Rang von $\underline{G}$ ist die Dimension eines maximalen über F zerfallenden Torus $\underline{T}$ von $\underline{G}$. Der F-Rang verschwindet genau dann, wenn jedes Element von $\underline{G}_F$ halbeinfach ist. Da $\underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Q}}$ stets das unipotente Element

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

enthält, ist

$$1 \leq \mathbb{Q}\text{-Rang } \underline{G}^{(d)} \leq \mathbb{R}\text{-Rang } \underline{G}^{(d)}.$$

Der $\mathbb{R}$-Rang von $\underline{G}^{(d)}$ ist der Rang der Lie-Gruppe $\underline{G}^{(d)}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi,\mathbb{C})$. Dieser ist bekanntlich 1 (Helgason, Kap. IX, Typ AIII), also

$$\mathbb{Q}\text{-Rang } \underline{G}^{(d)} = \mathbb{R}\text{-Rang } \underline{G}^{(d)} = 1 .$$

Den $\mathbb{R}$-Rang liest man auch aus der Iwasawa-Zerlegung von $\underline{G}$ ab (Borel, [4], 11.19). Da wir diese Zerlegung brauchen, wird sie für $SU(\Psi,\mathbb{C})$ angegeben (siehe Hemperly, [20], Abschnitt 2).

übereinstimmen muß, die durch die Gleichung für $\tilde{\gamma}$ $\tilde{\gamma}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ definiert ist. $\underline{P}_{K_1} \underset{Df}{=} \underline{P}$ ist dann als Normalisator von $\underline{U}_{K_1}$ minimale parabolische $\mathbb{Q}$-Untergruppe von $\underline{G}$.

I.5 Randpunkte, maximale unipotente und minimale parabolische Untergruppen

Die maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergruppen sind alle untereinander $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$-konjugiert und haben paarweise den trivialen Durchschnitt $\{1\}$, weil $\underline{G}$ vom $\mathbb{Q}$-Rang 1 ist (Raghunathan, [41], Lemma 12.15). Ferner folgt aus $\mathbb{Q}$-Rang = 1, daß es nur zwei $\underline{G}_{\mathbb{Q}}$-Konjugationklassen von parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen gibt, nämlich die der beiden parabolischen Standarduntergruppen, die zum System der primitiven $\mathbb{Q}$-Wurzeln gehören, das aus $\mathbb{Q}$-Rang (= 1) Elementen besteht. Eine Konjugationsklasse besteht aus $\underline{G}$ und die andere aus den minimalen parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen von $\underline{G}$.

Wir können nun für $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ folgende eineindeutige Beziehung zu der Menge der K-wertigen Randpunkte

$$\partial_K(B^2) = \left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \partial B^2;\ a,b \in K\right\}$$

herstellen:

5.1 Lemma.

Sei $\mathfrak{P}$ die Menge der minimalen parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen von $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$ und $\mathfrak{U}$ die Menge der maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergruppen von $\underline{G}$. Mit den Zuordnungen $\mathfrak{P} \ni \underline{P} \longmapsto R_u(\underline{P}) \in \mathfrak{U}$ (unipotentes Radikal) und $\mathfrak{U} \ni \underline{U} \longmapsto \mathcal{N}(\underline{U}) \in \mathfrak{P}$ (Normalisator in $\underline{G}$) haben wir folgendes kommutative Diagramm bijektiver Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} l\tilde{\gamma} \arrow[d, mapsto] & \underline{P}_{\kappa_1,\mathbb{Q}}\backslash \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \partial_K B^2 \arrow[d, leftrightarrow] & \kappa \arrow[d, mapsto] \\ \underline{P}_{\gamma\kappa_1} & \mathcal{P} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{U} & \underline{U}_\kappa \end{tikzcd}$$

Den Beweis erhält man leicht mit folgenden Bemerkungen:
R_u ist surjektiv ([6], prop. 8.4). $\mathcal{N}R_u(\underline{P})$ ist parabolische $\mathbb{Q}$-Untergruppe, die $\underline{P}$ enthält ([6], prop. 8.6). $R_u\mathcal{N}R_u(\underline{P}) = R_u(\underline{P})$ ([6], prop. 4.29).

Aus dem Lemma folgt speziell, daß $\partial_K B^2$ der $SU(\Phi,K) = \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Q}}$-Orbit eines beliebigen K-rationalen Randpunktes κ ist. Die Behauptungen dieses Punktes gelten auch für $\mathbb{R}$, ∂B^2 anstelle von $\mathbb{Q}$, $\partial_K B^2$, speziell

$$\partial B^2 = SU(\phi, \mathbb{C})\cdot\kappa_1 \tag{5.2}$$

I.6 Struktur der maximalen unipotenten Untergruppen

Für eine unipotente Lie-Gruppe U mit der Kommutatorgruppe $[U,U]$ und eine diskrete Untergruppe Γ betrachten wir das folgende exakte kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & {[U,U]} \arrow[r] & U \arrow[r, "\pi"] & U/[U,U] \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \Gamma\cap[U,U] \arrow[r] \arrow[u, hook] & \Gamma \arrow[r] \arrow[u, hook] & \pi(\Gamma) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1 \end{tikzcd}$$

Ist $U = U_\infty$ und setzen wir $[a,r] = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{1}{2}i|a|^2+r \\ 0 & 1 & i\bar{a} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{C}$, $r\in\mathbb{R}$,

so ist $[U,U] = \{[0,r];\ r\in\mathbb{R}\}$ isomorph zur additiven Gruppe von $\mathbb{R}$, und π kann identifiziert werden mit der Abbildung $[a,r] \longmapsto a$ von U_∞ auf die additive Gruppe von $\mathbb{C}$. Für $\kappa\in\partial B^2$ und $U = U_\kappa$ gilt der folgende

6.1 Satz.
Sei Γ diskrete Untergruppe von $U = U_\kappa = \underline{U}_{\kappa,\mathbb{R}}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Γ ist ein Gitter in U
(ii) Γ ist uniform in U
(iii) $\Gamma\cap[U,U]$ ist Gitter in $[U,U]\cong\mathbb{R}$ und $\pi(\Gamma)$ ist Gitter in $\pi(U)\cong\mathbb{C}$
(iv) $\pi(\Gamma)$ ist Gitter in $\pi(U)\cong\mathbb{C}$.

Beweis. U ist einfach zusammenhängend. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist daher in [41], Theorem 2.1 enthalten. Daß unter Voraussetzung (i), (ii) $\Gamma\cap[U,U]$ uniforme Untergruppe von $[U,U]$ ist, findet man im Korollar des eben zitierten Theorems. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt nun aus der Betrachtung der stetigen surjektiven Abbildung $U/\Gamma \longrightarrow \pi(U)/\pi(\Gamma)$ mit kompakten Fasern, zu $[U,U]/\Gamma\cap[U,U] \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homöomorph.
Für (iv) $\Longrightarrow$ (iii) bemerken wir, daß die Rechenregel in U_∞

$$[a,r]\cdot[b,s] = [a+b, r+s-\mathrm{Im}\,a\bar{b}] \tag{6.2}$$

gilt, woraus sich für den Kommutator zweier Elemente

$$[b,s]\cdot[a,r]\cdot[b,s]^{-1} = [0, 2\mathrm{Im}\,a\bar{b}]$$

ableitet. Nach Voraussetzung existieren zwei Elemente $a,b\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}\,a\bar{b}\neq 0$, $[a,r]$, $[b,s]\in\Gamma$. $[\Gamma,\Gamma]$ ist nichttrivial und damit $\Gamma\cap[U_\infty,U_\infty]$ ein Gitter in $[U_\infty,U_\infty]\cong\mathbb{R}$. Da alle U_κ, $\kappa\in\partial B^2$ untereinander konjugiert und isomorph zu U_∞ sind (siehe 3. und 4.), ist der Satz bewiesen.

I.7 Kompaktifizierung von B^2/Γ

Sei $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, Γ arithmetische Untergruppe von $\underline{G}$, $G = \underline{G}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi, \mathbb{C})$. Nach Pjatezkij-Shapiro, [39], §9 heißt $\kappa \in \partial B^2$ Γ-rationaler Randpunkt, wenn

$$G_{\kappa,3}/\Gamma_{\kappa,3} \text{ kompakt.}$$

Dabei ist

$$G_{\kappa,3} = \{g \in G;\ \lim_{s\to\infty} (z(s), gz(s)) = 0\}, \quad \Gamma_{\kappa,3} = \Gamma \cap G_{\kappa,3},$$

wobei $z(s)$ Geodätische bzgl. der Bergmann-Metrik von B^2 ist, die für $s \longrightarrow \infty$ gegen den Randpunkt κ läuft. Pjatezkij-Shapiro beweist in [39], §6 $G_{\kappa,3} = U_\kappa$. Genauer wird das in allgemeinerer Form für das Siegelgebiet 2. Art D, den Randpunkt ∞ und $G = SU(\Psi, \mathbb{C})$ gezeigt, was sich aber wegen $D \cong B^2$ und (5.2) auf unseren Fall überträgt. Also ist $\kappa \in \partial B^2$ Γ-rationaler Randpunkt genau dann, wenn $U_\kappa/\Gamma_{\kappa,u}$ kompakt ist mit $\Gamma_{\kappa,u} = \Gamma_\kappa \cap U_\kappa$, $\Gamma_\kappa = \Gamma \cap P_\kappa$, P_κ stationäre Untergruppe von G im Randpunkt κ. Die Definition der Menge $\partial_\Gamma B^2$ der Γ-rationalen Randpunkte hängt nur von der Kommensurabilitätsklasse von Γ ab.

7.1 Satz.

Mit den obigen Bezeichnungen sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) κ ist Γ-rationaler Randpunkt, d.h. $\kappa \in \partial_\Gamma B^2$

(ii) $U_\kappa/\Gamma_{\kappa,u}$ ist kompakt

(iii) $\Gamma_{\kappa,u} \neq \{1\}$

(iv) $\kappa \in \partial_K B^2$

Beweis. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) wurde schon vor der Formulierung des Satzes behandelt. Die Bedingungen sind jeweils für Γ und $\underline{G}_{\mathbb{Z}}$ gleichzeitig erfüllt oder nicht erfüllt wegen der Kommensurabilität der beiden Gruppen. Wir können deshalb $\Gamma = \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Z}}$ voraussetzen.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) ist trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): Jedes unipotente Element $\gamma \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}$ liegt in einer maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergruppe von $\underline{G}$. Ist $1 \neq \gamma \in \Gamma_{\kappa,u}$, so liegt γ sowohl in U_κ als auch in einer maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergruppe, die nach 5.1 die Form U_λ mit $\lambda \in \partial_K B^2$ hat. Wie in 5. bereits bemerkt wurde gilt für $\mathbb{R}$-Rang-1-Gruppen, daß zwei verschiedene maximale unipotente $\mathbb{R}$-Untergruppen triviale Durchschnitt haben. Also gilt $U_\kappa = U_\lambda$ und nach 5.1 (mit $\mathbb{R}$ statt $\mathbb{Q}$) $\kappa = \lambda$.

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): $\underline{U}_\kappa$ ist unipotente $\mathbb{Q}$-Untergruppe von $\underline{G}$ und $\Gamma_{\kappa,u} = \underline{U}_{\kappa,\mathbb{Z}}$ arithmetische Untergruppe. Nach einem Satz von Borel ([4], Korollar 13.2) ist $\Gamma_{\kappa,u}$ Gitter in U_κ, und über Satz 6.1 ergibt sich (ii).

In unserem Falle $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$ muß notwendig eine echte Hinzunahme von Punkten zur Kompaktifizierung von B^2/Γ erfolgen, denn G/Γ ist nicht kompakt, was übrigens für jede halbeinfache über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Gruppe $\underline{G}$ und ihre arithmetischen Untergruppen Γ zutrifft, die den $\mathbb{Q}$-Rang 1 hat (vgl. 4.). In 4. wurde ein unipotentes Element angegeben, um den Nachweis für $\mathbb{Q}$-Rang = 1 zu führen. Jetzt wurde sogar gezeigt, daß es sehr viele unipotente Elemente in Γ gibt, z.B. in U_{κ_1}, $\kappa_1 = \mathbb{P}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, nach (ii) von 7.1. Wir werden sehen, daß jede arithmetische Untergruppe sogar einen Normalteiler von endlichem Index enthält, der nur aus unipotenten Elementen besteht.

Die Kompaktifizierung von $B^2/$ wird definiert durch

$$\widehat{B^2/\Gamma} = (B^2 \cup \partial_\Gamma B^2)/\Gamma = (B^2 \cup \partial_K B^2)/\Gamma.$$

Die dabei verwendete Topologie in den hinzugefügten Punkten wird in 9. behandelt. Wegen der eineindeutigen Korrespondenz von $\partial_K B^2/\Gamma$ und $\underline{P}_{K,\mathbb{Q}} \backslash \underline{G}_{\mathbb{Q}}/\Gamma$ (siehe 5.1) - letztere Menge ist nach einem Satz von Borel (siehe [41], Theorem 13.26) endlich - haben wir in Wirklichkeit nur endlich viele Kompaktifizierungspunkte (Spitzensingularitäten). J.M. Feustel hat in [2] gezeigt, daß für $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$ und $\Gamma = \underline{G}_{\mathbb{Z}}$ die Anzahl der Spitzensingularitäten gerade die Klassenzahl von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ist. Daß $\widehat{B^2/\Gamma}$ tatsächlich kompakt ist, wurde bereits in der Einleitung (siehe Seite 5) erwähnt. Pjatezkij-Shapiro beweist in [39], § 10, daß $\widehat{B^2/\Gamma}$ ein normaler Moishezon-Raum ist. Aus der Flächentheorie weiß man, daß die minimale Singularitätenauflösung $\widetilde{\widehat{B^2/\Gamma}}$ von $\widehat{B^2/\Gamma}$ eine projektive algebraische glatte Fläche ist.

I.8 Spiegelungen, elliptische und parabolische Elemente

8.1 Lemma.

Sei $\tilde{\gamma} \in U(\Phi, \mathbb{C})$, $\gamma = \mathbb{P}\tilde{\gamma} \in \mathrm{Aut}_{hol} B^2$. Dann hat γ mindestens einen Fixpunkt $x \in \overline{B^2} = B^2 \cup \partial B^2$.

Beweis. ~~Brouwer~~scher Fixpunktsatz.

8.2 Lemma.

Γ sei arithmetische Untergruppe von $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$, $\gamma \in \Gamma \leq \underline{G}_{\mathbb{Z}}$. Dann sind die Eigenwerte von γ Einheitswurzeln.

Beweis. Hat γ einen Fixpunkt $x \in B^2$, so hat γ endliche Ord-

nung, weil Γ eigentlich diskontinuierlich auf B^2 wirkt (siehe z.B. [47], Satz 1.6) und deshalb die stationäre Gruppe $\mathbb{P}\Gamma_x$ endlich ist, und die Gruppe der auf B^2 uneffektiv wirkenden Elemente von $SU(\Phi, \mathbb{C})$ ist ebenfalls endlich (siehe Diagramm auf Seite 13). Hat γ hingegen keinen Fixpunkt in B^2, so liegt nach Lemma 8.1 γ in Γ_κ für ein $\kappa \in \partial B^2$. O.B.d.A. (Kommensurabilität) können wir $\Gamma \leq \underline{G}_{\mathbb{Z}}$ und Γ ungemischt (frz. net, engl. neat) annehmen, das heißt, jedes Element von Γ ist ungemischt, hat also Eigenwerte, die eine torsionsfreie Untergruppe in $\mathbb{C}^*$ erzeugen ([4], Satz 17.4). Γ_κ liegt dann nach Theorem 17.10 von [4] in $M_\kappa \cdot U_\kappa$, wobei M_κ der anisotrope Torusanteil in der Zerlegung $P_\kappa = M_\kappa \cdot A_\kappa \cdot U_\kappa$ ist (siehe Ausführungen in 4.). Die Eigenwerte von γ haben demnach den Betrag 1 (betrachte P_∞). Das charakteristische Polynom von γ, das Koeffizienten in $\mathcal{O}_K$ hat, zeigt, daß jeder Eigenwert von γ ganz algebraisch ist, und alle Konjugierten sind vom Betrag 1. Demzufolge muß es sich um eine Einheitswurzel handeln ([29], Kap. II, Lemma 18.2).

Bemerkung. Ist allgemeiner $\underline{G}$ algebraische $\mathbb{Q}$-Gruppe mit $\underline{G}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi, \mathbb{C})$, Γ $\underline{G}$-arithmetische Untergruppe von $U(\Phi, \mathbb{C})$, das heißt, Γ ist kommensurabel mit $\underline{G}_{\mathbb{Z}}$, so ist jeder Eigenwert eines Elementes $\gamma \in \Gamma$ eine komplexe Zahl vom Betrag 1, was leicht aus dem Beweis von Lemma 8.2 entnehmbar ist. Mir ist nicht klar, ob es sich stets um Einheitswurzeln handelt.

8.3 Koroll r.

Sei Γ $\mathbb{Q}$-arithmetische Gruppe wie in der Bemerkung. Dann sind die Eigenvektoren zweier verschiedener Eigenwerte von $\gamma \in \Gamma$ Φ-orthogonal.

Beweis. Bemerkung zu 8.2 und Vergleich von $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ und $\langle \gamma\tilde{x}, \gamma\tilde{y} \rangle$ für Eigenvektoren $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \mathbb{C}^3$, die zu zwei verschiedenen Eigenwerten von γ gehören.

8.4 Satz.

$\gamma \in U(\Phi, \mathbb{C})$ habe nur Eigenwerte vom Betrag 1, und γ wirke nicht identisch auf B^2. Dann sind die folgenden Bedingungen (e_i), (s_j) bzw. (u_k) jeweils untereinander äquivalent:

(s_1) γ hat mindestens zwei Fixpunkte in B^2.

(s_2) γ hat mindestens zwei Fixpunkte in $\overline{B^2}$.

(s_3) $\dim \operatorname{Fix} \gamma = 1$ $(\operatorname{Fix} \gamma$ in $B^2)$.

(s_4) γ hat genau zwei Eigenwerte, und die Einschränkung von Φ auf den Eigenraum des zweifachen Eigenwertes ist indefinit.

(e_1) γ hat genau einen Fixpunkt in B^2.

(e_2) γ hat genau einen Fixpunkt in $\overline{B^2}$, und dieser liegt in B^2.

(e_3) a) γ hat drei verschiedene Eigenwerte

oder

b) γ hat genau zwei Eigenwerte, und Φ ist auf dem Eigenraum des zweifachen Eigenwertes positiv definit.

(p_1) γ hat keinen Fixpunkt in B^2.

(p_2) γ hat in $\overline{B^2}$ genau einen Fixpunkt, dieser liegt auf ∂B^2.

(p_3) γ ist nicht halbeinfach.

γ gehört zu genau einer der drei Klassen, die durch die Eigenschaften (s_j), (e_i) bzw. (p_k) definiert sind.

8.5 Definition. Die Elemente γ der Klasse (e_i), (s_j) bzw. (p_k) heißen elliptisch, Spiegelungen bzw. parabolisch. Ein elliptisches Element vom Typ b) wird Symmetrie genannt. Ein parabolisches Element mit einem einzigen Eigenwert wird unipotent genannt (es ist dann in der Tat bis auf einen uneffektiven Skalarfaktor unipotent im eigentlichen Sinne).

8.6 Korollar. Ist γ Element einer $\underline{G}^{(d)}$-arithmetischen Gruppe $\Gamma \leq U(\Phi, \mathbb{C})$, $\gamma \neq id_{B^2}$, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

(o) γ hat endliche Ordnung.

(h) γ ist halbeinfach.

(e,s) γ ist elliptisch oder Spiegelung.

(f) γ hat mindestens einen Fixpunkt in B^2.

8.7 Korollar.

$\gamma \in \underline{G}^{(d)} = SU(\Phi, \mathcal{O})$ sei Spiegelung oder nichtunipotentes Element. Für $d \neq 1, 3$ ist dann 1 einfacher und -1 zweifacher Eigenwert. Für $d = 3$ ist das bis auf Multiplikation mit einer dritten Einheitswurzel auch der Fall. Für $d = 1$ kann darüber hinaus γ auch -1 als einfachen und $i = \sqrt{-1}$ oder $-i$ als zweifachen Eigenwert haben.

Beweis von Satz 8.4. Die Bedingungen (e_1), (s_1), (p_1) schließen sich gegenseitig aus, ebenso (e_2), (s_2), (p_2). Hingegen erschöpfen (e_3), (s_4), (p_3) alle möglichen Fälle, wie man sich anhand einer Φ-Orthogonalbasis von Eigenvektoren für halbeinfache γ leicht überlegt. Wegen $(s_3) \Longrightarrow (s_2), (s_1)$ genügt es daher die folgenden Schlüsse durchzuführen:

genwerte, so ist nach Korollar
rtorbasis von $\mathbb{C}^3$ Φ-orthogonal.
t, ist einer dieser Eigenvekto-
$\tilde{x}^2 = \langle x,x\rangle$), die beiden anderen
t der gesuchte eindeutig bestimm-
w. B^2.

chen Eigenwertes muß wegen der
m des anderen Eigenwertes negativ
n Fixpunkt in B^2. Der zweite Ei-
unkt in $\overline{B^2}$.

er zweifache Eigenwert von γ,
äume. E_μ hat die Dimension 2, da
ist Fix $\gamma = B^2 \cap \mathbb{P}E_\mu$ eindimensio-

mit $\tilde{x}^2 < 0$ existieren, so wäre
nensional. Demzufolge gilt für
> 0. Es folgt $(\tilde{x}^\perp)^\perp = \mathbb{C}\tilde{x}$,
, und $\tilde{x}^\perp \cap \tilde{y}^\perp = \mathbb{C}\tilde{z}$ ist eindimen-
$\tilde{x}^\perp \cap \tilde{y}^\perp$. Also ist $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ eine
ktoren von γ und γ daher halb-
aussetzung.
ear unabhängige Eigenvektoren $\tilde{x}, \tilde{y}$
) ist dann nicht möglich, da Φ
$^\perp \cap \tilde{y}^\perp = \mathbb{C}\tilde{z}$ eindimensional. Wäre
likation beider Seiten mit $\tilde{x}$ bzw.

y zum Widerspruch $z = 0$ führen. Also ist $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ eine Basis von Eigenvektoren von γ des Raumes $\mathbb{C}^3$ und γ halbeinfach, Widerspruch.

q.e.d.

Zum Beweis von Korollar 8.6 genügt es nun, darauf hinzuweisen, daß die Eigenwerte von γ Einheitswurzeln sind (8.2).

γ aus Korollar 8.7 hat genau zwei Eigenwerte. Man überlegt sich leicht anhand des charakteristischen Polynoms von γ, daß diese in $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ liegen müssen. Die Betrachtung aller möglichen Fälle ergibt 8.7.

9. Spitzensingularitäten, lokale Fundamentalgruppe

9.0 Lemma.
Sei $\underline{G}$ $\mathbb{Q}$-algebraische Gruppe, $\underline{G}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi, \mathbb{C})$, Γ $\underline{G}$-arithmetische Untergruppe von $U(\Phi, \mathbb{C})$, $\kappa \in \partial B^2$ ein Γ-rationaler Randpunkt und $\gamma \in \Gamma_\kappa$. Dann sind die Eigenwerte von γ Einheitswurzeln.

Beweis. Im Beweis von Lemma 8.2 haben wir gesehen, daß Γ_κ in $M_\kappa \cdot U_\kappa$ liegt (Bezeichnungen von 4.). Γ_κ ist diskret in $M_\kappa \cdot U_\kappa$, und nach Satz 7.1 ist $U_\kappa / \Gamma_{\kappa,u}$ kompakt. Da $M_\kappa \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kompakt ist, ist Γ_κ ein Gitter in $M_\kappa \cdot U_\kappa$. Daraus läßt sich nun leicht folgern, daß $\Gamma_\kappa / \Gamma_{\kappa,u} \subset M_\kappa \cdot U_\kappa / U_\kappa \cong M_\kappa$ endlich ist. Daraus folgt, daß die Projektion von Γ_κ auf M_κ eine endliche zyklische Gruppe ist und die Eigenwerte von γ daher Einheitswurzeln.

Die Ausführungen in 4. erlauben es, Spitzensingularitäten durch Betrachtung des speziellen Randpunktes $\infty = \mathbb{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ von D zu untersuchen. $\Gamma = \Gamma_\infty$ sei diskrete Untergruppe von $P_\infty = M_\infty \cdot A_\infty \cdot U_\infty$ mit endlicher Projektion auf $M_\infty \cdot A_\infty$ (siehe 4.), und $\Gamma_u = \Gamma \cap U_\infty$

sei uniforme Untergruppe von U_∞. Sei

$$V_C = \{(z,u) \in D;\ 2\mathrm{Im}\, z - |u|^2 > C\}, \quad C \geq 0.$$

V_C ist Γ-invariant. Bei der Pjatezkij-Shapiro-Kompaktifizierung werden die

$$\widehat{V_C/\Gamma} = (V_C/\Gamma) \cup \{\hat\infty\} = (V_C \cup \{\infty\})/\Gamma$$

als Umgebungsbasis der Spitzensingularität $\hat\infty$ verwendet. $(V_C \cup \{\infty\})/\Gamma = (V_C/\Gamma) \cup \{\hat\infty\}$ ist lokal kompakter normaler analytischer Raum mit $\hat\infty$ als einziger Singularität.

Sei S die von den Spiegelungen von Γ erzeugte Untergruppe von Γ. Das ist offenbar ein Normalteiler von Γ.

9.1 <u>Satz</u>.
Für die lokale Fundamentalgruppe von $Y = (V_{C_0} \cup \{\infty\})/\Gamma$ im Punkte $\hat\infty$ gilt

$$\pi_1(Y, \hat\infty) = \Gamma/S .$$

Sie ist auflösbar.

<u>Beweis</u>. Nach Mumford, [37] (Kontrahierbarkeitseigenschaften für gute Umgebungen normaler zweidimensionaler Singularitäten, siehe auch Beweis von 11.1) gilt

$$\pi_1(Y, \hat\infty) = \varinjlim_{C > C_0} \pi_1(V_C/\Gamma).$$

Zur Bestimmung von $\pi_1(V_C/\Gamma)$ verwenden wir den folgenden

9.2 <u>Satz</u>. (Armstrong, [1]). H sei eigentlich diskontinuierlich wirkende Gruppe von Homöomorphismen eines lokal kompakten linear und einfach zusammenhängenden metrischen Raumes X, S der Normalteiler von H, der von den stationären Untergruppen aller $x \in X$ erzeugt wird. Dann gilt

$$\pi_1(X/H) = H/S.$$

Jedes Element von Γ hat höchstens zwei Eigenwerte wegen $\Gamma \subset M_\infty \cdot U_\infty$ (siehe 4.). Daher ist nach Satz 8.4, der aufgrund der Voraussetzungen über Γ anwendbar ist, jedes Element γ von Γ entweder eine Spiegelung oder parabolisch. Im letzteren Falle hat γ keinen endlichen Fixpunkt (siehe (p_1)). Also ist S die von den stationären Untergruppen der Punkte aus V_C, $C \geq 0$ beliebig, erzeugte Untergruppe, weil die Spiegelungen durch ∞ in jeder Umgebung von ∞ noch endliche Fixpunkte haben (vgl. (s_3)). Demnach gilt für beliebiges C nach 9.2

$$\pi_1(Y, \hat\infty) = \pi_1(V_C/\Gamma) = \Gamma/S .$$

Γ/S ist auflösbar, weil Γ Untergruppe der auflösbaren Gruppe P_∞ ist.

9.3 <u>Korollar</u>.
Die minimale Singularitätenauflösung von $\hat\infty$ ist, falls $\hat\infty$ nicht regulär ist, ein Baum rationaler Kurven, dessen Graph sternförmig ist, oder eine elliptische Kurve.

<u>Beweis</u>. Das folgt aus dem Klassifizierungssatz von Wagreich für normale Flächensingularitäten mit auflösbarer lokaler Fundamentalgruppe ([51]) und einem Resultat von Karras ([64], Lemmas 1.2 und 1.4), das die nichtsternförmigen Fälle ausschließt, wenn die lokale Fundamentalgruppe einen unendlich zyklischen Normalteiler hat, was nach 6.1 (iii) der Fall ist.

9.4 <u>Satz</u>.
Besteht Γ nur aus unipotenten Elementen, so ist die minimale Singularitätenauflösung von $\hat\infty$ eine elliptische Kurve. $\hat\infty$ ist eine Quotientensingularität genau dann, wenn Γ eine Spiegelung enthält. Sie ist in diesem Falle vom Typ $\mathbb{C}^2/(\Gamma/S)$.

<u>Beweis</u>. Die erste Behauptung folgt aus dem Kompaktifizierungsprozeß, den Hemperly in [20], §2 für unipotente Γ mit Hilfe einer elliptischen Kurve beschreibt, siehe auch Kap. II.

Ist $\hat{\kappa}$ eine Quotientensingularität, so ist nach Satz 2.8 in Brieskorns Arbeit [7] die lokale Fundamentalgruppe, die nach Satz 9.1 mit Γ/S übereinstimmt, endlich. Γ ist jedoch nicht endlich, da Γ_u sonst keine uniforme Untergruppe von U_∞ wäre. Also gilt $S \neq \{1\}$; insbesondere existiert eine Spiegelung in Γ.

Enthalte nun umgekehrt Γ eine Spiegelung σ. Wir zeigen $[\Gamma : S] < \infty$. Aus der Endlichkeit der Fundamentalgruppe Γ/S folgt dann wiederum nach dem eben angegebenen Satz in Brieskorns Arbeit [7], daß $\hat{\kappa}$ eine Quotientensingularität ist und zwar vom im Satz genannten Typ, was aus dem Beweis des Brieskornschen Satzes hervorgeht.

Wegen $[\Gamma : \Gamma_u]$ muß $[\Gamma_u : S_u] < \infty$ mit $S_u = S \cap U_\infty$ gezeigt werden. Mit den Bezeichnungen von 6. und $[\theta] = \operatorname{diag}(\theta, \theta^{-2}, \theta)$, $|\theta| = 1$, sei $\sigma = [\theta][a,r]$. Es gilt

$$[\theta][b,s][\theta]^{-1} = [\theta b, s] \quad ,$$

und mit (6.2) erhält man für alle $[b,s] \in \Gamma_u$

$$[b,s][\theta][a,r][b,s]^{-1} = [a+(\bar{\theta}-1)b, *] \in S.$$

Multiplikation mit σ^{-1} von rechts ergibt

$$[(1-\theta)b, *] \in S_u \ .$$

Mit der Abbildung π aus 6. ergibt sich, daß $\pi(S_u)$ das Gitter $(1-\theta)\pi(\Gamma_u)$ von $\mathbb{C}$ enthält. Nach Satz 6.1 ist S_u ein Gitter in U_∞, woraus die Behauptung folgt.

q.e.d.

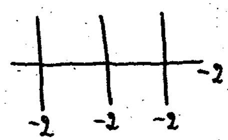
9.5 <u>Korollar</u> (Schwartzmann [42], [43]).
$\hat{\kappa}$ ist regulär genau dann, wenn Γ durch Spiegelungen erzeugt wird.

Das folgt nun sofort mit Hilfe des Kriteriums von Mumford für 2-dimensionale normale Singularitäten: Der Punkt ist regulär genau dann, wenn die lokale Fundamentalgruppe trivial ist ([37]).

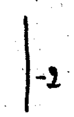
9.6 <u>Beispiel</u>.
Sei $\Gamma = SU(\phi, \sigma)$, $\sigma = \sigma_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ oder $\Gamma = U(\phi, \sigma_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})})$, $\kappa = \mathbb{P}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt für die lokale Fundamentalgruppe der Spitzensingularität $\hat{\kappa}$

$$\pi_1(\hat{\mathbb{B}}/\Gamma, \hat{\kappa}) = \Gamma_\kappa/K_\kappa = \begin{cases} \text{Quaternionengruppe} ; & d \equiv 3 \bmod 8 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ; & d \equiv 1,2 \bmod 4 \ , \ d \neq 1 \\ \{1\} ; & d \equiv 7 \bmod 8 \ , \ d = 1 \text{ oder } \Gamma = U(\phi, \sigma_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}) \end{cases}$$

Im 3. Falle ist $\hat{\kappa}$ ein regulärer Punkt. Inden beiden anderen Fällen haben wir folgende Bäume glatter rationaler Kurven als minimale Singularitätenauflösungen von $\hat{\kappa}$ mit Selbstschnittindex -2 und gegenseitiger Schnittzahl 0 oder 1 (siehe Brieskorn, [7]):



bzw.



Der Beweis ergibt sich aus der Bestimmung eines Erzeugenden-

Erzeugende von Γ_κ/S_κ: $\begin{cases} \{0,2\} & 1 \neq d \equiv 1,2 \bmod 4 \\ \{1,1\},\ \{(1+\sqrt{-d})/2,1\} & d \equiv 3 \bmod 8 \end{cases}$

Bemerkung: J.M. Feustel konnte in [2] zeigen, daß das Resultat 9.6 unabhängig von der Wahl der Spitze ist.

10. Die Spitzensingularitäten der Kongruenzuntergruppen

Sei $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$ ein Ideal, $\Gamma = SU(\Phi, \mathfrak{o})$. Die Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\mathfrak{a})$ ist durch die exakte Folge

$$1 \longrightarrow \Gamma(\mathfrak{a}) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Gl_3(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})$$

definiert. $\Gamma(\mathfrak{a})$ ist Normalteiler von endlichem Index in Γ, also arithmetische Untergruppe von $\underline{G} = \underline{G}^{(d)}$.

Für eine Matrix A mit Koeffizienten in $\mathfrak{o}$ schreiben wir $\mathfrak{a} \mid A$, wenn $\mathfrak{a}$ jedes Element von A teilt. Für $X \in \Gamma$ gilt dann

$$X \in \Gamma(\mathfrak{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{a} \mid E-X .$$

10.1 Satz.
Ein Γ-rationaler Randpunkt $\kappa \in \partial B^2$ liefert in $\widehat{B^2/\Gamma(\mathfrak{a})}$

eine Singularität $\hat{\kappa}$ vom Torustyp $\Longleftrightarrow \mathfrak{a} \nmid 2$

eine Quotientensingularität $\hat{\kappa}$ $\Longleftrightarrow \mathfrak{a} \mid 2$

Beweis. Es gelte $\mathfrak{a} \nmid 2$. Wir zeigen für jeden Γ-rationalen Randpunkt

$$\Gamma_\kappa(\mathfrak{a}) = \Gamma_{\kappa,u}(\mathfrak{a}).$$

Aus Satz 9.4 folgt dann die erste Behauptung. Wir nehmen an, daß ein $\gamma \in \Gamma_\kappa \setminus \Gamma_{\kappa,u}$ existiert. Nach Satz 8.4 hat γ genau zwei verschiedene Eigenwerte, und Korollar 8.7 zeigt, daß einer davon in der Menge $\{-1, i, -i\}$ liegt. $\tilde{x} \in K^3$ (vgl. 7.1 (iv)) sei ein zu diesem Eigenwert λ gehöriger Eigenvektor, o.B.d.A. $\tilde{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathfrak{o}$. Da in jeder Idealklasse ein zu einem vorgegebenen Ideal teilerfremdes Ideal liegt (siehe z.B. [27], Satz 9, § 40, oder Gleichverteilungssatz für Primideale weiter unten im Beweisverlauf), können wir o.B.d.A. $\mathfrak{t} = \mathfrak{o}a + \mathfrak{o}b + \mathfrak{o}c$ zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd annehmen. Es folgt wegen $\mathfrak{a} \mid \gamma - E$ und $\gamma\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$ nacheinander :

$(\gamma - E)\tilde{x} = (\lambda - 1)\tilde{x}$, $\mathfrak{a} \mid (\lambda-1)\tilde{x}$, $\mathfrak{a} \mid (\lambda - 1)$, $\mathfrak{a} \mid \lambda - 1 \in \{-2, -1 \pm i\}$, $\mathfrak{a} \mid 2$.

Im Falle $\mathfrak{a} \mid 2$ geben wir für ein geeignetes vollständiges Repräsentantensystem von $\partial_K B^2 / \Gamma(\mathfrak{a})$ für jeden dieser Repräsentanten κ eine Spiegelung an, die κ als Fixpunkt hat.

Es genügt dies offenbar für $\mathfrak{a} = 2\mathfrak{o}$ zu tun, womit dann der 2. Teil von Satz 10.1 unter Berücksichtigung von Satz 9.4 bewiesen ist. Die Konstruktion der Spiegelungen, die durchgeführt wird , geht in der Grundidee auf Feustel zurück, der den Nachweis für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ führte ([2]).

Zunächst können wir den Γ-rationalen Randpunkt $\kappa \in \partial_K B^2$ so darstellen:

$$\kappa = \mathbb{P}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{o}, \ \mathfrak{z} = (\alpha, \beta, \gamma) \text{ Primideal mit } \mathfrak{z} \neq \bar{\mathfrak{z}} \nmid 2 \text{ oder } \mathfrak{z} = \mathfrak{o} \tag{10.2}$$

Das ist nach dem Gleichverteilungssatz für Primideale in Idealklassen möglich: dieser sichert die Existenz von unendlich vielen Primidealen in jeder Idealklasse (siehe Lang, [31], VIII, §5, Theorem 6 mit der Korrektur in Serre [45], Ergänzung zu Kapitel I, Bemerkung zu Beispiel 2). Die Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{p}}$ sind fast alle Hauptideale. Als endlich viele Ausnahmen kommen

nur die Primteiler der verzweigten Primzahlen in Frage. Also können wir jede Idealklasse durch ein Primideal $\mathfrak{z} \neq \bar{\mathfrak{z}} \nmid 2$ bzw. (Hauptidealklasse) durch $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ repräsentieren.

Ferner können wir durch Abänderung von κ innerhalb des Orbits $\Gamma(2)\kappa$ erreichen, daß (im Falle $\mathfrak{z} \neq \mathfrak{o}$) gilt

$$v_{\mathfrak{z}}(\beta) = \min\{v_{\mathfrak{z}}(\alpha), v_{\mathfrak{z}}(\beta), v_{\mathfrak{z}}(\gamma)\} = 1 , \tag{10.3}$$

wobei $v_{\mathfrak{p}} : K^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$ die normierte diskrete Bewertung durch das Primideal $\mathfrak{p}$ bezeichnet. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: $\Gamma_o = SU(\mathrm{diag}(1,-1), \mathfrak{o})$ wirkt auf $\mathbb{C}^2$ und läßt sich auf zwei naheliegende Weisen in $\Gamma = SU(\phi, \mathfrak{o})$ einbetten:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} , \quad A \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$$

Die Bilder in Γ bezeichnen wir mit Γ_1 bzw. Γ_2 , analog mit $\Gamma_1(2)$, $\Gamma_2(2)$ die Bilder der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_o(2)$.

Sei $\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}^2$, $\mathfrak{p}$ Primideal von $\mathfrak{o}$, das weder 2 noch die Diskriminante $D_{K/\mathbb{Q}}$ teilt, z.B. $\mathfrak{p} = \mathfrak{z}$. Mit Hilfe von Elementen aus $\Gamma_o(2)$ kann $\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ so abgeändert werden, daß das Minimum von $v_{\mathfrak{p}}(\mu)$ und $v_{\mathfrak{p}}(\nu)$ in die andere Komponente rutscht, z.B., falls $v_{\mathfrak{p}}(\mu) \neq v_{\mathfrak{p}}(\nu)$, mit

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{-d} & -2\sqrt{-d} \\ 2\sqrt{-d} & 1 - 2\sqrt{-d} \end{pmatrix} \in \Gamma_o(2)$$

Mittels $\Gamma_1(2)$ und $\Gamma_2(2)$ wird dieses Minimumverschiebungsverfahren auf $\mathfrak{o}^3$ anwendbar, woraus sich nun leicht (10.3) ergibt.

Für $x \in \mathfrak{o}$ setzen wir nun

$$A = A(x) = \bar{\alpha} + \gamma x, \ B = B(x) = \bar{\gamma} + \alpha x , \tag{10.4}$$

$$\sigma = E - \frac{2}{|\beta|^2}\sigma_1 \quad \text{mit}$$

) folgt $A \equiv 0 \bmod \rho^{v_\rho(|\beta|^2)}$ und daraus (10.9).

$\rho | \alpha$, $\rho \nmid \gamma$

ß $A = A(x_\rho) \equiv 0 \bmod \rho^{v_\rho(|\beta|^2)}$.

) folgt $B \equiv 0 \bmod \rho^{v_\rho(|\beta|^2)}$ und daraus (10.9).

$\rho | \alpha$, γ ; $\rho \nmid \bar{\alpha}$, $\rho \neq \gamma$

Falle ist $x_{\bar{\rho}}$ durch (i) bereits festgelegt, und wir

$= x_{\bar{\rho}}$. Unter der Voraussetzung von (10.9) für x

$\equiv 0 \bmod \bar{\rho}^{v_{\bar{\rho}}(|\beta|^2)}$ und damit $\bar{A}, \bar{B} \equiv 0 \bmod \rho^{v_\rho(|\beta|^2)}$,

e erste Hälfte von (10.9) gezeigt ist. Nach (10.2)

β. Daraus folgt $v_\rho(|\beta|^2) = v_\rho(\bar{\beta}) \leq \begin{cases} v_\rho(\bar{\beta}\bar{x}_\rho A); \\ v_\rho(\bar{\beta}\bar{x}_\rho B). \end{cases}$

$\rho | \alpha, \gamma, \bar{\alpha}$; $\rho \nmid \bar{\gamma}$, $\rho \neq \gamma$

analog zu (iii).

$|^2 = |\gamma|^2$ kann man folgern, daß nur noch die Fälle

vtl. $\rho = \bar{\gamma}$ offen sind. Im Falle $\gamma = \sigma$ sind wir

g.

$\rho = \gamma$ oder $\bar{\gamma}$

ereits festgelegt, das heißt $\bar{\gamma}$ gehört zu (i) oder

$\underset{Df}{=} x_{\bar{\gamma}}$. Nach (i) bzw. (ii) gilt unter Voraussetzung

)

$A = A(x) \equiv B = B(x) \equiv 0 \bmod \bar{\gamma}^{v_{\bar{\gamma}}(|\beta|^2)}$,

edem Falle $\bar{\gamma} | x$, $\gamma | \bar{x}$. Daraus folgt

$v_\gamma(\bar{\beta}\bar{x}B) \geq v_\gamma(\bar{\beta}) + 1 = v_\gamma(\bar{\beta}) + v_\gamma(\beta) = v_\gamma(|\beta|^2)$.

gibt sich der zweite Teil von (10.9). Der erste

wie in (iii) bewiesen.

(i), (ii) noch nicht festgelegt, d.h. $\bar{\gamma} | \alpha, \gamma$,

β nach (10.2). Also gilt

$$v_{\mathfrak{z}}(|\beta|^2) = v_{\bar{\mathfrak{z}}}(|\beta|^2) = 1 .$$

$x_{\mathfrak{z}}$, $x_{\bar{\mathfrak{z}}}$ können beliebig in $\mathcal{O}$ gewählt werden, denn für alle $x \in \mathcal{O}$ gilt nun $\mathfrak{z}|A,B$, $\bar{\mathfrak{z}}|\bar{A},\bar{B},\bar{\beta}$ und damit (10.9).

Satz 10.1 ist damit bewiesen.

I.11 Regularität und einfacher Zusammenhang

11.1 Satz.

$S \subset U(\Phi, \mathbb{C})$ sei arithmetische Gruppe einer algebraischen $\mathbb{Q}$-Gruppe $\underline{G}$ mit $\underline{G}_{\mathbb{R}} = SU(\Phi, \mathbb{C})$. S werde durch die stationären Untergruppen der Punkte $x \in B^2$ erzeugt, und S_κ enthalte eine Spiegelung für jedes $\kappa \in \partial_S B^2$. Dann ist $\widetilde{B^2/S}$ einfach zusammenhängend, insbesondere regulär.

11.2 Korollar.

Γ sei $\underline{G}^{(d)}$-arithmetische Untergruppe von $U(\Phi, \mathbb{C})$; Γ_κ werde durch Spiegelungen erzeugt für jedes $\kappa \in \partial_\Gamma B^2$. Dann ist $\widetilde{B^2/\Gamma}$ einfach zusammenhängend, insbesondere regulär.

Beweis von 11.1. $\pi: \widetilde{B^2/\Gamma}' \longrightarrow \widetilde{B^2/\Gamma}$ sei minimale Singularitätenauflösung, $E = \bigcup E_i$ die Auflösungskurve, $Ei = \pi^{-1}(x_i)$. Nach Mumford, [37], kann man stets eine gute Umgebung (tubular neighbourhood) A_i von E_i finden, die die Eigenschaft hat, daß

∂A_i Deformationsretrakt von $A_i \setminus E_i$,

E_i Deformationsretrakt von $A_i \setminus \partial A_i$

ist. Die Kurven E_i sind einfach zusammenhängend: liegt nämlich x_i in B^2/Γ, so ist x_i Quotientensingularität, weil die stationäre Untergruppe Γ_{x_i} endlich ist. Ist hingegen x_i eine Spitze, so liegt ebenfalls nach Satz 9.4 eine Quotientensingularität vor.

Die Auflösungskurve einer Quotientensingularität ist ein Baum rationaler Kurven (Brieskorn, [7]) und demnach einfach zusammenhängend. Wegen der Homotopieäquivalenz von E_i und $A_i \setminus \partial A_i$ ist $A_i \setminus \partial A_i$ einfach zusammenhängend.

Nach dem Satz 9.2 von Armstrong ist B^2/S einfach zusammenhängend. $\widetilde{B^2/S}$ erhält man aus B^2/S durch Ersetzen der Singularitäten $x_i \in B^2/S$ durch E_i und dem Hinzufügen der Spitzensingularitätenauflösungskurven E_j bzw. der Spitzensingularitäten selber falls diese bereits regulär sind. Mit Hilfe des Satzes von van Kampen (siehe etwa [21], Theorem 6.4.3) kann man nun leicht sehen, daß dabei der einfache Zusammenhang erhalten bleibt.

Aus dem Isomorphiesatz von Hurewicz (siehe [49], VII, §5, Theorem 5) folgt nun sofort, daß die 1. Bettizahl $b_1(\widetilde{B^2/S})$ verschwindet und damit auch die Irregularität q, weil $b_1 = 2q$ für algebraische Flächen gilt.

Beweis von 11.2. Es genügt zu zeigen, daß Γ durch die stationären Untergruppen Γ_x, $x \in B^2$ erzeugt wird. Dazu sei $\gamma \in \Gamma$. Nach Satz 8.1 hat γ einen Fixpunkt in $\overline{B^2}$. Ist dieser endlich, so liegt γ in $\bigcup_{x \in B^2} \Gamma_x$. Hat γ keinen endlichen Fixpunkt, so ist γ parabolisch und daher nach 8.6 nicht von endlicher Ordnung. Die Eigenwerte sind nach 8.2 Einheitswurzeln. Es existiert daher eine natürliche Zahl k, so daß $1 \neq \gamma^k$ unipotent ist. Sei $\kappa \in \partial B^2$ γ-invarianter Randpunkt. Aus $1 \neq \gamma^k \in \Gamma_{\kappa,u}$ und Satz 7.1 folgt, daß κ Γ-rationaler Randpunkt ist. Γ_κ wird nach Voraussetzung von Spiegelungen erzeugt. Diese liegen in $\bigcup_{x \in B^2} \Gamma_x$ nach Satz 8.4. Also liegt γ in jedem Falle in der durch die stationären Untergruppen von Punkten aus B^2 erzeugten Untergruppe von Γ, womit hat als Inverse $\quad \exp^{-1} = \ln\colon U \longrightarrow \mathfrak{u}$

$$X \longmapsto (X-E) - \frac{1}{2}(X-E)^2 + \frac{1}{3}(X-E)^3 + - \ldots + \frac{(-1)^n}{n-1}(X-E)^{n-1}.$$

O.B.d.A. können wir $\Gamma \leq \underline{U}_{\mathbb{Z}}$ annehmen. Sei $k = [\underline{U}_{\mathbb{Z}} : \Gamma]$. Dann liegt die Kongruenzuntergruppe $\underline{U}_{\mathbb{Z}}(kn!)$ in Γ. Dazu konstruieren wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
(n-1)! \cdot \tilde{\mathfrak{u}}_{\mathbb{Z}} \arrow[rr, "\exp"] & & \underline{U}_{\mathbb{Z}} \\
& \underline{U}_{\mathbb{Z}}^{k} \arrow[r, hook] & \Gamma \arrow[u, hook] \\
k(n-1)!\, \tilde{\mathfrak{u}}_{\mathbb{Z}} \arrow[uu, hook] \arrow[ur] & & \underline{U}_{\mathbb{Z}}(k \cdot n!) \arrow[ll, "\ln"] \arrow[u, hook] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

11.6 <u>Satz.</u>

Sei $\underline{G} \subseteq \underline{Gl}_n$ zusammenhängende halbeinfache algebraische $\mathbb{Q}$-Untergruppe von $\underline{Gl}_n$ vom $\mathbb{Q}$-Rang 1, so daß die Eigenwerte der Elemente von $\underline{G}_{\mathbb{Z}}$ stets Einheitswurzeln sind; S sei Normalteiler einer arithmetischen Untergruppe Γ von $\underline{G}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) S ist arithmetische Untergruppe von $\underline{G}$.

(ii) Es existiert eine Kongruenzuntergruppe $\Gamma(m) \leq S$.

(iii) Für jede maximale unipotente $\mathbb{Q}$-Untergruppe $\underline{U}$ von $\underline{G}$ ist $S \cap U$ arithmetische Untergruppe von $\underline{U}$.

(iv) Für ein (beliebiges) vollständiges Repräsentantensystem $\underline{U}_1, \ldots, \underline{U}_s$ von Konjugationsklassen bzgl. Γ der Menge der maximalen unipotenten $\mathbb{Q}$-Untergruppen von $\underline{G}$ gilt: $S \cap U_i$ ist arithmetische Untergruppe von $\underline{U}_i$, $i = 1, \ldots, s$.

11.7 <u>Bemerkungen.</u> Die Endlichkeit der Zahl der Γ-Äquivalenzklassen von $\mathcal{U}$ für $\mathbb{Q}$-Rang-1-Gruppen folgt aus der schon in 7.

erwähnten Endlichkeit von $\underline{P}_{\mathbb{Q}} \backslash \underline{G}_{\mathbb{Q}} / \Gamma$ für jedes $\underline{P}$ der Menge $\mathfrak{P}$ der minimalen parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen von $\underline{G}$ und der eineindeutigen Korrespondenz von $\mathcal{U}$ und $\mathfrak{P}$ (siehe 4.).

Matsumoto ([33]) hat für zusammenhängende einfach zusammenhängende einfache algebraische über $\mathbb{Q}$ definierte Gruppen vom $\mathbb{Q}$-Rang ≥ 2 bewiesen, daß jede arithmetische Untergruppe eine Kongruenzuntergruppe von $\underline{G}_{\mathbb{Z}}$ enthält. (i) $\Longrightarrow$ (ii) ergänzt diesen Satz.

<u>Beweis von Satz 11.6.</u> Durch Übergang zu $S' = S \cap \underline{G}_{\mathbb{Z}}$, $\Gamma' = \Gamma \cap \underline{G}_{\mathbb{Z}}$ ist leicht zu sehen, daß wir o.B.d.A. für den Fall $\Gamma \leq \underline{G}_{\mathbb{Z}}$ unsere Überlegungen durchführen können. Da (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) trivial ist, verbleibt zu zeigen :

(iv) $\Longrightarrow$ (ii): Nach Lemma 11.5 existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$S \cap U_i \geq \underline{U}_{i,\mathbb{Z}}(m) \geq \Gamma(m) \cap U_i \ , \ i = 1,\dots,s.$$

Ist $\underline{U}$ beliebige maximale unipotente $\mathbb{Q}$-Untergruppe, so existiert ein $i \in \{1,\dots,s\}$ und ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma^{-1}\underline{U}_i\gamma = \underline{U}$. Es folgt

$$\Gamma(m) \cap U = \Gamma(m) \cap \gamma^{-1}U_i\gamma = \gamma^{-1}(\Gamma(m) \cap U_i)\gamma \leq \gamma^{-1}(S \cap U_i)\gamma = S \cap (\gamma^{-1}U_i\gamma) = S \cap U \ .$$

Nach Borel ([4]) kann m so groß gewählt werden, daß $\Gamma(m)$ ungemischt ist (vgl. auch Beweis von 8.2). Da die Eigenwerte von $\Gamma(m)$ Einheitswurzeln sind, besteht $\Gamma(m)$ nur aus unipotenten Elementen. Daraus folgt

$$\Gamma(m) = \bigcup_{\underline{U} \in \mathcal{U}} (\Gamma(m) \cap U) \leq \bigcup_{\underline{U} \in \mathcal{U}} (S \cap U) \leq S \ .$$

q.e.d.

~~11.8 **Theorem.**~~

~~Sei $\Gamma \subset U(\Phi, \mathbb{C})$ $\underline{G}^{(d)}$-arithmetische Untergruppe, so daß jede stationäre Untergruppe Γ_κ eines beliebigen Γ-rationalen Randpunktes κ von B^2 eine Spiegelung enthält. Dann ist $\widetilde{B^2/\Gamma}$ eine reguläre Fläche.~~

<u>Beweis.</u> Sei $S = (\bigcup_{x \in B^2} \Gamma_x)$ die Untergruppe von Γ, die durch alle stationären Untergruppen erzeugt wird. S ist Normalteiler von Γ. Für alle Γ-rationalen Randpunkte κ enthält S_κ eine Spiegelung. Nach 9.4 ist $S_{\kappa,u}$ arithmetische Untergruppe von U_κ, und nach Satz 11.6 ist S arithmetische Untergruppe von $\underline{G}$. Jetzt folgt aus Satz 11.1, daß $\widetilde{B^2/S}$ regulär (sogar einfach zusammenhängend) ist. Die endliche Gruppe Γ/S wirkt auf B^2/S, und es ist

$$(B^2/S)^{\Gamma/S} = B^2/\Gamma \ .$$

Wir erhalten daraus eine rationale dominierende Abbildung

$$\widetilde{B^2/S} \dashrightarrow \widetilde{B^2/\Gamma} \ .$$

Beseitigung der Unbestimmtheitspunkte durch Aufblasen von Punkten, Definition und birationale Invarianz der Irregularität $q = H^0(X, \Omega^1_X)$ von Flächen X mit Hilfe der Garbe der Keime holomorpher 1-Formen zeigen, daß aus der Regularität von $\widetilde{B^2/S}$ die Regularität von $\widetilde{B^2/\Gamma}$ folgt.

q.e.d.

~~11.9 <u>Satz.</u> Γ sei $\underline{G}^{(d)}$-arithmetische Gruppe, $\underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Z}}(2) \leq \Gamma \leq U(\Phi, \mathbb{C})$. Dann ist die Fläche $\widetilde{B^2/\Gamma}$ regulär.~~

~~<u>Beweis.</u> Das folgt sofort aus Satz 10.1 und Theorem 11.8.~~

II. KLASSIFIKATION VON KUGELSPITZEN- UND KUGELQUOTIENTENSINGULARITÄTEN

II.1 Quotienten von Singularitäten

Um Quotienten von Singularitäten zu definieren, gehen wir von folgendem Satz aus.

1.1 Satz (H. Cartan, [56]).
X sei normaler komplexer Raum, G eigentlich diskontinuierlich wirkende Gruppe von Automorphismen von X, $p: X \longrightarrow X/G$ die natürliche Projektion auf den (zunächst topologischen) Faktorraum X/G und $\mathcal{O}_{X/G}$ die Ringgarbe, die auf offenen Mengen $U \subset X/G$ definiert ist durch

$$\mathcal{O}_{X/G}(U) = \{f: U \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ f \circ p \in \mathcal{O}_X(p^{-1}(U))\} \ .$$

Dann gilt

(i) $(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$ ist ein normaler komplexer Raum.

(ii) $p: X \longrightarrow X/G$ ist holomorph, surjektiv, diskret und für endliche Gruppen G eigentlich und damit eine analytisch verzweigte Überlagerung.

Wir geben einen (i.a. singulären) Punkt eines analytischen Raumes y durch y und eine Umgebung Y von y an, also als Paar (Y,y) (Umgebungskeim).

1.2 Definition. (Y,y) heißt Quotient des singulären (oder auch regulären) Punktes (X,x), wenn $Y = X/G$ und $p(x) = y$ mit X, G und p wie in Satz 1.1.

1.3 Bemerkung. Da G eigentlich diskontinuierlich wirkt, kann man stets annehmen, daß $G = G_y$ endlich ist. Quotienten von regulären Punkten sind gerade die Quotientensingularitäten im üblichen Sinne. Diese lassen sich bekanntlich stets durch

$(\mathbb{C}^n/G, p(0))$ mit einer endlichen Gruppe $G \subset Gl_n(\mathbb{C})$ beschreiben.

1.4 Definition. C sei glatte kompakte analytische Kurve, $F \longrightarrow C$ ein Linienbündel über C. Mit C bezeichnen wir auch den Nullschnitt von F. Hat C negativen Selbstschnittindex (als Kurve auf F), so heißt der Punkt, der durch Kontraktion von C entsteht, Linienbündelsingularität.

1.5 Bemerkung. Nach dem folgenden Satz läßt sich C mit $(C^2) < 0$ zu einer normalen isolierten Singularität kontrahieren.

1.6 Satz (Grauert, [60]).
X sei eine analytische Fläche, $C = \bigcup C_i$ eine komplexe kompakte Kurve auf X mit negativ definiter Schnittmatrix $(C_i \cdot C_j)$; dann ist X/C ($= (X \setminus C) \cup \{\text{Punkt } P\}$) normaler komplexer Raum mit (höchstens) einer einzigen Singularität P.

Wir betrachten Linienbündel $F \longrightarrow C$ zusammen mit einer endlichen Gruppe G analytischer Automorphismen von F, die den Nullschnitt C in sich überführen. Dann erhalten wir falls $(C^2) < 0$ gilt folgendes kommutative Diagramm in der Kategorie der analytischen Räume:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{p} & F/G \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \bar{\sigma} \\ F/C & \xrightarrow{p'} & (F/C)/G \end{array} \qquad (1)$$

1.7 Definition. (Y,Q) heißt Quotient einer Linienbündelsingularität $(F/C, P = \sigma(C))$, wenn (Y,Q) isomorph zu einem Umgebungskeim $((F/C)/G, p'(P))$ ist mit obigen Bezeichnungen. (Y,Q) heißt effektiver Quotient der Linienbündelsingularität

$(F/C, P = \sigma(C))$ nach G, wenn die Einschränkung von G auf den Nullschnitt C effektiv auf C wirkt. Etwas präziser nennen wir (Y,Q) dann Quotient der Linienbündelsingularität $(F/C, \sigma(C))$ längs der Galoisüberlagerung von Kurven $C \longrightarrow C/G$.

Quotienten von Linienbündelsingularitäten sind normale Flächensingularitäten und daher isolierte Singularitäten. Wir werden sehen, daß auch der reguläre Punkt als Quotient von Linienbündelsingularitäten in Erscheinung tritt.

II.2 Zyklische Quotientensingularitäten.

Unter einer zyklischen Quotientensingularität verstehen wir eine Singularität $(\mathbb{C}^n/Z, p(0))$, wobei $Z < Gl_n(\mathbb{C})$ eine zyklische Gruppe und $p: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n/Z$ der Quotientenmorphismus ist. Für $n = 2$ stellen wir die Resultate zusammen, die im folgenden benötigt werden. Dazu schicken wir voraus:

2.1 Definition (Gottschling, [59]). (X,x) sei regulärer auf einer analytischen Mannigfaltigkeit der Dimension n, g ein Automorphismus von X endlicher Ordnung, der x fixiert. g heißt Spiegelung im Punkte x, wenn $(dg)_x: T_{X,x} \longrightarrow T_{X,x}$ mindestens $(n-1)$ mal den Eigenwert 1 hat. ($T_{X,x}$ Tangentialraum).

2.2 Bemerkung. Nach einem Satz von Cartan ([57]) existiert für jede kompakte Gruppe analytischer Automorphismen einer beschränkten Umgebung von 0 in $\mathbb{C}^n$, die den 0-Punkt fixiert, stets ein analytisches Koordinatensystem, so daß G diese Koordinaten linear transformiert. Daher ist g Spiegelung genau dann, wenn g in einer Umgebung von x in X eine analytische Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 punktweise fixiert. Den Tangential-

raum dieser Untermannigfaltigkeit im Punkte x bezeichnen wir als Spiegelrichtung von g in x (als Unterraum von $T_{X,x}$).

2.3 Satz (Gottschling [59]).
G sei eigentlich diskontinuierlich wirkende Gruppe von Automorphismen einer analytischen Mannigfaltigkeit X, $p: X \longrightarrow X/G$ die Quotientenabbildung. $y = p(x)$ ist regulär genau dann, wenn der Stabilisator G_x durch Spiegelungen im Punkte x erzeugt wird.

Für durch involutive Spiegelungen erzeugte endliche Gruppen $G \subset Gl_n(K)$ wurde bereits von Chevalley das globale Resultat $K^n/G \cong K^n$ für Körper K mit Charakteristik 0 bewiesen ([8]). Die Verallgemeinerung des globalen Resultats auf nicht notwendig involutive Spiegelungen findet man in [54], Theorem 3, Kap. V, § 5.3.

Ist $G \subset Gl_n(\mathbb{C})$ endlich, S die Untergruppe, die von den Spiegelungen von G erzeugt wird, so ist S Normalteiler von G, und die Faktorisierung von $\mathbb{C}^n$ nach G läßt sich in zwei Schritten realisieren:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathbb{C}^n/G \\ & \mathbb{C}^n/S \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \mathbb{C}^n/S \cong \mathbb{C}^n \qquad (2a)$$

wobei p_2 die induzierte Faktorisierung nach G/S ist.

Ist $Z \subset Gl_2(\mathbb{C})$ zyklisch, so ist $\mathbb{C}^2/Z = \mathbb{C}^2/\left(\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right)$, wobei $\left(\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right)$ die durch $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Gruppe bezeichnet; ζ, μ sind dabei Einheitswurzeln, o.B.d.A. $\mathrm{ord}\,\zeta \geq \mathrm{ord}\,\mu$.

$\mathbb{Z}$ enthält im allgemeinen Elemente mit verschiedenen Spiegelrichtungen $\begin{pmatrix} \zeta^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu^m \end{pmatrix}$. Es liegt höchstens eine Spiegelrichtung vor genau dann, wenn $\operatorname{ord}\mu \mid \operatorname{ord}\zeta$, also $\mu = \zeta^e$.

2.4 <u>Definition</u>. Die Gruppe $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^e \end{pmatrix}$ mit $\zeta = e^{2\pi i/d}$, $d \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit $\langle d,e \rangle$. Ist (X,x) ein regulärer Punkt, $G = G_x$ endliche Gruppe von Automorphismen der analytischen Fläche X, und es existiert (lokal) ein analytischer Isomorphismus von $(\mathbb{C}^2,0)$ auf (X,x), der die Wirkung von G auf die Wirkung von $\left(\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^e \end{pmatrix}\right)$ überträgt, so heißt G vom Typ $\langle d,e \rangle$ in $x \in X$, und die Singularität $(X/G, p(x))$ heißt ebenfalls vom Typ $\langle d,e \rangle$.

2.5 <u>Lemma</u> (Kürzungsregel).
Jede zyklische Quotientensingularität vom Typ $\langle d,e \rangle$ ist auch vom Typ $\langle \frac{d}{(d,e)}, \frac{e}{(d,e)} \rangle$, wobei (d,e) den größten gemeinsamen Teiler von d und e bezeichnet.

<u>Beweis</u>. Wir können uns auf $\mathbb{C}^2/\langle d,e \rangle$ beschränken. Es wird gezeigt, daß p_2 im Diagramm (2a) gerade die Faktorisierung von $\mathbb{C}^2$ nach $\left(\begin{pmatrix} \zeta^{(d,e)} & 0 \\ 0 & \zeta^{e/(d,e)} \end{pmatrix}\right)$ ist. Ist nämlich $\mathbb{C}^2 = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u,v]$, so ist $S = \left(\begin{pmatrix} \zeta^{d/(d,e)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ und $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^2/S = \mathbb{C}^2/\langle (d,e),(d,e) \rangle \cong$ $\cong \operatorname{Spec} \mathbb{C}[u^{(d,e)}, v]$, und $\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^e \end{pmatrix}$ mod S führt $u^{(d,e)}$ in $\zeta^{(d,e)} u^{(d,e)}$ und v in $\zeta^e v$ über. Also ist p_2 in (2a) die Faktorisierung von $\mathbb{C}^2$ nach $\langle d/(d,e), e/(d,e) \rangle$.

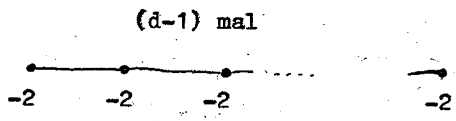
Die minimale Singularitätenauflösung von zyklischen Quotientensingularitäten wurde von Hirzebruch bestimmt. Mit Hilfe der der Kürzungsregel kann der Sachverhalt so formuliert werden:

2.6 <u>Satz</u> (Hirzebruch [63]).
Die minimale Singularitätenauflösung einer Quotientensingularität vom Typ $\langle d,e \rangle$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $0 < e < d$, ist ein Baum von r rationalen Kurven

mit Selbstschnittindexen $-b_i \leq -2$ und Schnittindex 0 oder 1 für zwei verschiedene Komponenten. Die b_i berechnen sich aus der Ketten bruch entwicklung

$$\frac{d}{e} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{b_3 - \cfrac{1}{b_4 - \cdots - \cfrac{1}{b_r}}}}$$

Speziell haben wir für $\langle d,d-1 \rangle$ den Auflösungsgraphen



und für $\langle d,1 \rangle$ den Auflösungsgraphen $\bullet\ -d$.
Lassen wir e = d zu, so erhalten wir nach 2.3 als zyklische Singularität vom Typ $\langle d,d \rangle$ den regulären Punkt. Mit dem Bruch $d/e = 1$ und dem Graphen $\bullet\ -1$ reiht sich der Typ $\langle d,d \rangle$ in den obigen Satz als Aufblasungsgerade des regulären Punktes ein, wovon aus technischen Gründen oft Gebrauch gemacht wird.

2.7 <u>Lemma</u>.
Die Quotientensingularität vom Typ $\langle d,1 \rangle$, $d \geq 1$, ist eine Linienbündelsingularität.

st -d=-ordZ
ritätenauf-
ichentwick-
verselle
uf $\mathbb{C}^2 \setminus 0$

einer Flä-
des Punk-
Quotienten-
Fläche X_e
usführung
rationalen

-2
die aus
2 besteht,
ebenen Typs
$\longrightarrow X$ exi-
en:
$Q = 0$ an-
e-te Ein-
s 0-Punktes

(2b)

Sei $L = \sigma^{-1}(0)$. Z wirkt auf L mit zwei Fixpunkten, die den Eigenvektoren der Elemente von Z entsprechen. Sind u,v lokale Parameter in $Y = \mathbb{C}^2$ im Punkte 0, so sind das die $\tilde{0}$, ∞ auf L, die die lokalen Parameter $(u,v/u)$ bzw. $(u/v,v)$ haben. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ führt u in u, v/u in $\omega v/u$, u/v in $\omega^{-1}(v/u)^{-1}$ und v in ωv über, so daß $Z_{\tilde{0}}$ vom Typ $\langle e,e\rangle$ und Z_∞ vom Typ $\langle e,e-1\rangle$ ist. Auf $\tilde{Y}/Z$ liegt also (höchstens) eine Singularität, nämlich $P_e = \tilde{p}(\infty)$. Diese ist vom Typ $\langle e,e-1\rangle$ und liegt auf $L_e = \tilde{p}(L) \cong \mathbb{P}^1$. Ferner gilt $\sigma_e^{-1}(0) = L_e$. Diese Konstruktion habe ich in der Arbeit [70] von Pinkham gefunden (Beweis des dortigen Lemmas 3.7).

2.9 Satz.

X sei glatte komplexe Fläche, $Q \in X$, G endliche Gruppe von Automorphismen von X, und $G = G_Q$ sei vom Typ $\langle d,e\rangle$. Dann setzt sich G auf X_e fort, und wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X_e \arrow[r, "p_e"] \arrow[d, "\sigma_e"'] & X_e/G \arrow[d, "\overline{\sigma}_e"] \\ X \arrow[r, "p"] & X/G \end{tikzcd} \qquad (2c)$$

Für $\overline{Q} = p(Q)$ gilt: $\overline{\sigma}_e^{-1}(\overline{Q}) = p_e(L_e)$. Ist Q_e der singuläre Punkt auf X_e vom Typ $\langle e,e-1\rangle$, so ist $p_e(Q_e)$ die einzige Singularität auf X_e/G, die auf $\overline{\sigma}_e^{-1}(\overline{Q})$ liegt. Diese ist vom Typ $\langle e,-d\rangle$ (genauer $-d$ mod e). Ist $\widetilde{X/G} \xrightarrow{\mu} X/G$ eine Singularitätenauflösung von $\overline{Q} \in X/G$, so faktorisiert μ über $\overline{\sigma}_e$.

2.10 Bemerkung. In der eben zitierten Arbeit von Pinkham wird dieser Satz im Beweis des dortigen Lemmas 3.7 für den Fall $(d,e) = 1$ verwendet. Pinkham verweist auf die Arbeit [58] von Fujiki. $\overline{\sigma}_e$ wird als erster Auflösungsschritt der Singularität $\overline{Q}$

bezeichnet. Wir müssen uns davon überzeugen, daß die bei Fujiki nicht auftretenden aber bei uns vorhandenen Spiegelungen die Gültigkeit der Aussage nicht beeinträchtigen. Es sei noch bemerkt, daß im Falle $d = e$ unter $\overline{\sigma}_e$ die Aufblasung des Punktes $p(Q)$ verstanden wird.

Beweis des Satzes 2.9: Anknüpfend an die Bemerkung beginnen wir mit der letzten Aussage. Die Singularität $\overline{Q}$ vom Typ $\langle d,e\rangle$ wird durch $\overline{\sigma}_e$ "verbessert", da auf $\overline{\sigma}_e^{-1}(\overline{Q})$ nur noch eine Singularität vom Typ $\langle e,-d\rangle$ liegt $(1 \leq e \leq d)$. Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man offenbar zu einer Auflösung der Singularität $\overline{Q}$. Wir beobachten, daß die Vereinfachungsschritte gekoppelt sind mit dem Gaußschen Algorithmus mit Vorzeichenwechsel beginnend mit dem Paar d,e:

$$d = d_0 = b_1 e - d_2 \qquad 1 \leq d_2 \leq d_1 = e,$$
$$e = d_1 = b_2 d_2 - d_3 \qquad 1 \leq d_3 \leq d_2 \text{ , u.s.w.}$$

Das Verfahren kann abgebrochen werden, wenn Gleichheit $d_{i+1} = d_i$ eintritt, weil genau dann keine Singularität mehr vorliegt. Dieser Gaußsche Algorithmus führt genau zur Kettenbruchentwicklung wie sie im Satz 2.6 von Hirzebruch angegeben ist. Damit benötigt man genau so viele Schritte $\overline{\sigma}_e$ zur Auflösung von $\overline{Q}$ wie es Komponenten des Urbildes von $\overline{Q}$ in der minimalen Singularitätenauflösung μ von $\overline{Q}$ gibt. Also führt das Verfahren zur minimalen Auflösung der Singularität $\overline{Q}$. Das beweist den letzten Teil des Satzes 2.9.

Für den ersten Teil nehmen wir wieder o.B.d.A. $X = \mathbb{C}^2$, $G = \langle d,e\rangle = \left(\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^e \end{pmatrix}\right)$ an. Sei $Z = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}\right)$, ω primitive e-te Einheitswurzel und H das direkte Produkt

$$H = Z\cdot\left(\begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\right) = Z\cdot\langle d,1\rangle\ ,$$

$Y = \mathbb{C}^2$. Dann haben wir durch zweimaliges Faktorisieren folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{Y} \arrow[rr, "\tilde{q}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\sigma"'] & & \tilde{Y}/H \arrow[dd, "\tilde{\sigma}"] \\
 & \tilde{Y}/Z \arrow[ur] \arrow[d] & \\
 & Y/Z \arrow[dr] & \\
\mathbb{C}^2 = Y \arrow[rr, "q"'] \arrow[ur] & & Y/H
\end{tikzcd}$$

Das linke Viereck ist gerade das Diagramm (2b). Wir zeigen, daß H/Z angewandt auf $X = Y/Z \cong \mathbb{C}^2$ gerade die Wirkung von G induziert, so daß das rechte Viereck gerade das gesuchte Diagramm (2c) ist. Seien u,v lokale Parameter von Y in 0. Dann sind u, v^e lokale Parameter von $X = \mathbb{C}^2 = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[u,v^e]$ in 0. $\begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}$ mod Z führt u in ζu und v^e in $\zeta^e v^e$ über, so daß $Y/H = X/G$ gilt. Die möglichen Singularitäten auf $\tilde{Y}/H$ liegen auf $\tilde{q}(L)$, $L = \sigma^{-1}(0)$, da die Elemente von H höchstens auf L isolierte Fixpunkte haben. Es kommen wieder nur die Bilder der Punkte $\tilde{0} \in L$ mit lokalen Koordinaten $(u, v/u)$ und $\infty \in L$ mit lokalen Koordinaten $(u/v, v)$ in Frage. Wir bestimmen den Typ von $H_{\tilde{0}}$ und H_∞. Die Wirkung von $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$ in beiden Punkten ist bekannt: $Z_{\tilde{0}}$ ist vom Typ $\langle e,e\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$, Z_∞ vom Typ $\langle e,e-1\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}\omega^{-1} & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}$ führt u in ζu, v/u in $1\cdot v/u$, u/v in $1\cdot\frac{u}{v}$ und v in ζv über. Also ist $H_{\tilde{0}} \cong \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}\zeta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$, $\begin{pmatrix}\zeta & \\ & \zeta\end{pmatrix}$ $\tilde{0} \xrightarrow{\begin{pmatrix}\zeta & 1\end{pmatrix}} \tilde{0}$
$H_\infty = \left(\begin{pmatrix}\omega^{-1} & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\right)$. $\infty \xrightarrow[\begin{pmatrix}1 & \zeta\end{pmatrix}]{} \infty$

$H_{\tilde{0}}$ wird von Spiegelungen erzeugt und liefert daher keine Singularität auf $\tilde{Y}/H = X_e/G$. Wir untersuchen $\mathbb{C}^2/\left(\begin{pmatrix}\omega^{-1} & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\right)$. Dazu faktorisieren wir zuerst nach $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\right)$. Die lokalen Parameter x, y^d in $0 \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^2/\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \zeta\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x,y^d]$ werden durch

$\begin{pmatrix}\omega^{-1} & 0\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$ in $\omega^{-1}x$ bzw. $\omega^d y^d$ überführt. Also ergibt sich eine Singularität vom Typ $\langle e,-d\rangle$.

q.e.d.

II.3 Sterntupel

3.1 **Definition.** C sei glatte komplexe Kurve, $b \in \mathbb{N}$, $P_1,\dots,P_n$ n verschiedene Punkte auf C, d_i, $e_i \in \mathbb{N}$, $1 \le e_i \le d_i$. Dann heißt

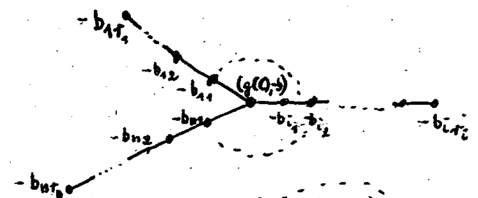
$$(C, b \mid P_1, d_1, e_1; P_2, d_2, e_2; \dots; P_n, d_n, e_n)$$

Sterntupel, wenn die Ungleichung

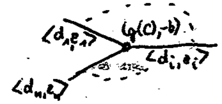
$$b - \sum_{i=1}^{n} e_i/d_i > 0$$

erfüllt ist. (C,b) heißt Zentrum des Sterntupels.

Jedem Sterntupel kann ein bewerteter sternförmiger Graph zugeordnet werden:



Kurzform:



wobei $g(C)$ das Geschlecht der Kurve C ist, und $b_{i_1},\dots,b_{i r_i}$ ergeben sich im Falle $e_i < d_i$ aus der Kettenbruchentwicklung wie in 2.6 mit $e = e_i$, $d = d_i$, $b_{ik} = b_k \geq 2$. Die Arme des sternförmigen Graphen sind also gerade die Auflösungsgraphen der zyklischen Quotientensingularitäten $\langle d_i,e_i\rangle$. Im Falle $e_i = d_i$ halten wir uns an die nach 2.6 getroffene Vereinbarung und setzen

Unter Berücksichtigung von Grauerts Satz 1.6 zeigt das folgende Lemma, daß die Sternkurve, falls sie auf einer Fläche realisiert ist, kontrahierbar ist genau dann, wenn die Ungleichung erfüllt ist. Diese Behauptung findet man ohne Beweis bei Pinkham 70 . Ein Beweis wird deshalb hier kurz skizziert.

3.2 Lemma.

Die Bedingung $b - \sum_{i=1}^{n} e_i/d_i > 0$ für das Sterntupel ist gleichbedeutend damit, daß die zugehörige Schnittmatrix S negativ definit ist.

Beweis. Zunächst ist jeder Diagonalblock von $-S$ positiv definit, denn

$$-A = \begin{pmatrix} -b_1 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -b_r \end{pmatrix}$$

ist Schnittmatrix des Auflösungsgraphen einer zyklischen Quotientensingularität $\langle d,e \rangle$. Durch Induktion zeigt man dann, daß für A $e/d = A_{11}/\det A$ gilt, wobei A_{11} die Adjunkte von A der Stelle $(1,1)$ ist. Nun sieht man mit $x_1 = -A_{11}/\det A = -e/d$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ b_2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots\cdots + x_r \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ b_r \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^r.$$

Zieht man blockweise diese Linearkombination in $-S$ von der ersten Spalte und anschließend symmetrisch dazu die entsprechende

Zeilenkombination von der ersten Zeile ab, so verschwinden die Elemente -1 am Rand der Matrix -S, und b geht in $b - \sum e_i/d_i$ über. Damit ist -S positiv definit genau dann, wenn

$b - \sum e_i/d_i > 0$.

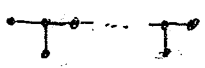
Beispiele.

1) Auflösungskurven (nicht notwendig minimal) aller Quotientensingularitäten lassen sich durch 3-armige Sterntupel

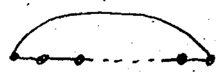
$(\mathbb{P}^1, b \mid P_1, d_1, e_1; P_2, d_2, e_2; P_3, d_3, e_3)$ mit $1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 > 1$,

(d_1, d_2, d_3) also eines der Tripel (2,2,n),(2,3,3),(2,3,4),(2,3,5), beschreiben. Die zyklischen Quotientensingularitäten dabei mit Hilfe der Tripel (2,2,n) und des kontrahierbaren Armes $(d_1, e_1) = (2,2)$ erfaßt. (siehe Brieskorn [7]).

2) Auflösungskurven von normalen Flächensingularitäten mit auflösbarer lokaler Fundamentalgruppe, deren minimale Auflösungskurven keinen bewerteten Graphen der Form



bzw.

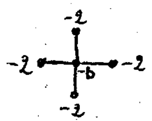


haben, lassen sich durch Sterntupel beschreiben. Es werden vier Typen unterschieden:

(I) zyklische Quotientensingularitäten (siehe 1))

(II) $(\mathbb{P}^1, b \mid P_1, 2, 1; P_2, 2, 1; P_3, 2, 1; P_4, 2, 1)$

bewerteter Graph:



(III) $(\mathbb{P}^1, b \mid P_1, d_1, e_1; P_2, d_2, e_2; P_3, d_3, e_3)$, g.g.T.$(d_i, e_i) = 1$,

(d_1, d_2, d_3)=(2,2,3),(2,3,4),(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3),(2,2,n)

(IV) (T,b), wobei T eine elliptische Kurve ist.

Literatur: Wagreich [51]. Nach Korollar I.9.3 sind die Kugelspitzensingularitäten unter diesen vier Typen zu finden.

3) Auflösungskurven der normalen Flächensingularitäten mit $\mathbb{C}^*$-Wirkung lassen sich mit Hilfe von Sterntupeln beschreiben (Orlik, Wagreich [69]). Pinkham zeigte in [70], daß es sich im Falle nichtzyklischer Quotientensingularitäten in unserer Terminologie um Quotienten von Linienbündelsingularitäten handelt, wobei nach einer Gruppe G faktorisiert wird, deren Elemente $g \neq id$ nur isolierte Fixpunkte auf dem Linienbündel haben. Wir benötigen den allgemeineren Fall, in dem auch Spiegelungen zugelassen sind.

4) Auflösungskurven effektiver Quotienten von Linienbündelsingularitäten lassen sich durch Sterntupel beschreiben.

$F' \longrightarrow C'$ sei dazu holomorphes Linienbündel über der glatten kompakten Kurve C' mit $(C'^2) = -b' < 0$, G eine endliche Gruppe von Automorphismen von F', die effektiv auf C' wirkt. Wir ordnen dem Paar (F',G) ein Sterntupel, dessen zugehöriger Graph Auflösungsgraph des G-Quotienten der Linienbündelsingularität auf F'/C' ist, auf folgende Weise zu: Sei $C = C'/G$. $P_1, \ldots, P_n$ seien die Verzweigungspunkte auf C der Galoisüberlagerung $C' \longrightarrow C$. $d_1, \ldots, d_n$ seien die Verzweigungsordnungen in den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ bzw.. Ist P_i' ein Urbildpunkt von P_i, so ist der Stabilisator $G_{P_i'}$ zyklisch der Ordnung d_i. $G_{P_i'}$ wirkt auf den Tangentialraum $T_{P_i', F_i'}$ und hat dort zwei Eigen räume der Dimension 1. Da $G_{P_i'}$ C' in sich überführt, ist der Tangentialraum von

C' ein Eigenraum. $G_{P_i'}$ wirkt auf C' effektiv, so daß C' keine Spiegelrichtung für Elemente $g \in G_{P_i'} \setminus \{id\}$ liefert. Die Elemente von $G_{P_i'}$ haben also höchstens eine Spiegelrichtung, und zwar transversal zur Kurve C'. Damit ist $G_{P_i'}$ vom Typ $\langle d_i, e_i \rangle$ für ein e_i. Die Singularitäten der Fläche F'/G, die auf $C = C'/G$ liegen, sind in den Punkten P_i konzentriert und vom Typ $\langle d_i, e_i \rangle$. Durch Auflösen dieser zyklischen Quotientensingularitäten (minimal, wenn $1 \leq e_i < d_i$; im Falle $d_i = e_i$ wird der reguläre Punkt aufgeblasen) erhalten wir eine Fläche $\widetilde{F} \longrightarrow F'/G$, die in einer Umgebung der vollständigen Transformierten C von $C \subset F'/G$ glatt ist. Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{F} \arrow[d] \\ F' \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\text{Kon-}\\\text{trak-}\\\text{tion}\\\text{von } C}"'] & F'/G \arrow[d] \\ F'/C \arrow[r] & (F'/C)/G \end{tikzcd}$$

$\widetilde{C}$ ist Auflösungskurve des G-Quotienten der Linienbündelsingularität auf F'/C. $\widetilde{C}$ läßt sich daher und aus dem vorangehenden durch das Sterntupel

$$(C, b \mid P_1, d_1, e_1; \ldots; P_n, d_n, e_n)$$

darstellen, wobei die eigentliche Transformierte von $C \subset F'/G$ in $\widetilde{F}$ ebenfalls mit C bezeichnet wurde, und $-b = (C^2)_{\widetilde{F}}$. Die Bedingung $b - \sum e_i/d_i > 0$ ist nach Lemma 3.2 und dem Kontrahierbarkeitskriterium (Satz 1.6 und seine Umkehrung) erfüllt.

II.4 <u>Ein Existenzsatz</u>.

Wir wollen zeigen, daß jedes Sterntupel bis auf eventuelle äquivalente Abänderung, sich durch den effektiven Quotienten einer Linienbündelsingularität realisieren läßt im Sinne von II.3, Beispiel 4). Um den Begriff der äquivalenten Abänderung präzise zu fassen, führen wir folgende Relation in der Menge aller Sterntupel ein:

$$(C, b \mid P_1, d_1, e_1; \ldots; P_n, d_n, e_n) \sim (C', b' \mid P_1', d_1', e_1'; \ldots; P_{n'}', d_{n'}', e_{n'}'),$$

wenn ein Isomorphismus $\tau : C \xrightarrow{\sim} C'$ existiert und eine Permutation σ der Zahlen $1, \ldots, n$, so daß $P'_{\sigma(i)} = \tau(P_i)$, $d'_{\sigma(i)} = d_i$, $e'_{\sigma(i)} = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und weiterhin entweder $n = n'$, $b = b'$ oder $n' = n+1$, $b' = b+1$, $e_{n'} = d_{n'}$ gilt. $\sim$ erzeugt eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Sterntupel. Läßt sich die Auflösungskurve C einer Flächensingularität durch ein Sterntupel S beschreiben und ist S' ein zu S äquivalentes Sterntupel, so existiert eine Auflösungskurve C' der Singularität, die durch S' beschrieben wird.

4.1 <u>Theorem</u> (Existenzsatz).

Seien $C' \xrightarrow{\pi} C$ eine Galoisüberlagerung glatter komplexer Kurven mit Galoisgruppe G, $P_1, \ldots, P_n \in C$ die Verzweigungspunkte der Überlagerung π mit den Verzweigungsordnungen d_i in P_i, $S = (C, b \mid P_1, d_1, e_1; \ldots; P_n, d_n, e_n)$ ein Sterntupel. Dann existiert ein Linienbündel F' über C' und eine Fortsetzung der Wirkung der Gruppe G von C' (Nullschnitt von F') auf F', so daß S eine Auflösungskurve des G-Quotienten der Linienbündelsingularität $(F'/C', C'/C')$ beschreibt.

4.2 Bemerkung. In der Terminologie von 1.7 stellt also S stets die Auflösungskurve eines Quotienten einer Linienbündelsingularität längs der Galoisüberlagerung $\pi: C' \longrightarrow C$ dar. Ohne Spiegelungen, d.h. für $(d_i, e_i) = 1$ läßt sich ein Beweis Pinkhams Arbeit [70], Abschnitt 3 entnehmen. Dieser wird hier auf den allgemeineren Fall, in dem Spiegelungen auftreten, ausgedehnt.

Beweis von 4.1. Für eine glatte vollständige komplexe algebraische Mannigfaltigkeit X sind folgende Gruppen untereinander isomorph:

Picardgruppe $\mathrm{Pic}\, X = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$,

Gruppe der Divisorenklassen von X,

Gruppe der Isomorphieklassen lokal freier Modulgarben über $\mathcal{O}_X$ vom Rang 1,

Gruppe der Isomorphieklassen holomorpher Linienbündel über X.

Siehe dazu etwa Mumford [68] und Schafarjewitsch [72]. Für eine glatte Untermannigfaltigkeit C von X ist für diese Gruppen der Einschränkungshomomorphismus $\varrho_C^X : \mathrm{Pic}\, X \longrightarrow \mathrm{Pic}\, C$ definiert. Für Flächen X sind Grad und Schnittindex für Elemente jeder der obengenannten Gruppen erklärt.

Ist X Fläche, C Kurve auf X, $E \in \mathrm{Pic}\, X$, so gilt

$$\deg \varrho_C^X(E) = (C \cdot E) \tag{4a}$$

Für das Normalenbündel $N_{X/C}$ von C in X gilt

$$N_{X/C} = F(\varrho_C^X(C)), \tag{4b}$$

wobei F das zugehörige Linienbündel bezeichnet.

Daraus folgt

$$\deg N_{X/C} = \deg \varrho_C^X(C) = (C^2) \tag{4c}$$

Sei nun (C,b) das Zentrum unseres Sterntupels. Es läßt sich immer ein Linienbündel F über C finden, so daß $(C^2)_F = -b$ ist. Es existiert nämlich eine Fläche X, die C mit Selbstschnittindex $(C^2) = -b$ enthält, etwa eine Regelfläche der birationalen Äquivalenzklasse von $C \times \mathbb{P}^1$, siehe Kap. IV in [71]. Ist $F = N_{X/C}$ das Normalenbündel, dann gilt

$$(C^2)_F = (C^2)_X = -b.$$

Ist $F = F(D)$, D ein Divisor auf C, so gilt nach (4c)

$$\deg D = (C^2) = -b.$$

Sei $\pi^{-1}(P_i) = \{Q_{i1}, \ldots, Q_{i,|G|/d_i}\}$. Wir bilden auf C' den Divisor

$$D' = \pi^{-1}(D) + \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{|G|/d_i} Q_{ij} \tag{4d}$$

Offenbar ist D' G-invariant, da G die Verzweigungspunkte Q_{ij}, die über P_i liegen, permutiert. Ist $F' = F(D')$ zugehöriges Linienbündel und $-b'$ der Selbstschnittindex von C' in F', so gilt

$$-b' = \deg D' = |G|\left(-b + \sum_{i=1}^{n} e_i/d_i\right) < 0. \tag{4e}$$

Dazu fasse man wieder F' als Normalenbündel $N_{F'/C'}$ auf. Dann ist

$$(C'^2)_{F'} = \deg N_{F'/C'} = \deg F' = \deg D' = |G| \deg D + \sum_{i=1}^{n} e_i |G|/d_i = |G|\left(-b + \sum_{i=1}^{n} e_i/d_i\right).$$

Der letzte Ausdruck ist kleiner als 0, weil S ein Sterntupel ist. Zur Abkürzung setzen wir nun $P = P_i$, $Q_j = Q_{ij}$, $d = d_i$, $k = |G|/d$. Der Träger des Divisors $\pi^{-1}(P) = \sum_{j=1}^{k} Q_j$ liegt in einer offenen affinen Menge $U' \subset C'$. Man nehme z.B. $U' = \pi^{-1}(U)$, wobei U offene affine Umgebung des Punktes $P \in C$ ist. Es gilt

4.3 Lemma (Pinkham [70]). Ist U' hinreichend kleine G-invariante offene analytische Umgebung von $\pi^{-1}(P)$, so ist auf U' $\sum Q_j$ Nullstellendivisor einer holomorphen Funktion $h : U' \longrightarrow \mathbb{C}$, deren d-te Potenz und keine frühere G-invariant ist.

Beweis. Wir argumentieren zunächst algebraisch. Sei $u \in \mathcal{O}_{P,C}$ lokaler Parameter in P, U eine offene affine Umgebung von P, so daß u auf U regulär und P Nullstellendivisor von u auf U ist. Ist $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_{Q_1,C'} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{Q_k,C'}$, so ist $\tilde{\mathcal{O}}$ Hauptidealring mit endlich vielen Primidealen, die durch lokale Parameter $t_1,\ldots,t_k$ in $Q_1,\ldots,Q_{k-1}$ bzw. Q_k erzeugt werden (siehe Schafarjewitsch [72], Kap. III, § 2, Theorem 2). Da der Nullstellendivisor von u auf $U' = \pi^{-1}(U)$ $\pi^{-1}(P) = d\sum Q_j$ ist, haben wir eine eindeutige Zerlegung

$$u = t_1^d \cdot \ldots \cdot t_k^d \cdot \varepsilon$$

mit einer Einheit ε in $\Gamma(U', \mathcal{O}_{C'})$, wobei U' hinreichend klein ist. Wir können o.B.d.A. $t_j = g_j^*(t_1)$ annehmen, wobei die g_j ein Repräsentantensystem der Faktorgruppe G/G_{Q_1} bilden. Also ist ε o.B.d.A. G-invariant, also Element von $\mathcal{O}^*_{P,C}$. Nun fahren wir analytisch fort. Lokal analytisch ist $\varepsilon = e^{2\pi i f}$ und daher $\varepsilon = \eta^d$ für ein $\eta \in \mathcal{O}^*_{P,C}$, also in einer hinreichend kleinen offenen analytischen Umgebung U' o.B.d.A.

$$u = t_1^d \cdot \ldots \cdot t_k^d .$$

Setzen wir $h = t_1 \cdot \ldots \cdot t_k$, so ist der Nullstellendivisor von h in U' gerade $\sum Q_j$ und $h^d = u$ ist G-invariant. Wäre h^l, $l < d$,

G-invariant, so wäre h^l lokaler Parameter in P, was offenbar nicht möglich ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Mit den Bezeichnungen von Lemma 4.3 gilt für alle $g \in G$

$$g^*(h) = a_g \cdot h \quad \text{für ein } a_g \in \Gamma(U', \mathcal{O}^*_{U'}) , \tag{4f}$$

$g^*(h)$ und h haben nämlich denselben Nullstellendivisor $\sum Q_j$ auf U'.

4.4 a_g ist für alle $g \in G$ eine d-te Einheitswurzel, die primitiv ist für jedes erzeugende Element g der Gruppe G_{Q_j}.

Beweis. Es gilt $h^d = g^*(h^d) = (g^*(h))^d = a_g^d \cdot h^d$ auf U' und daher $a_g^d \equiv 1$ auf U'. Ist $G_{Q_j} = (g)$, so ist d die Ordnung des Elementes g. Sei $a_g^l = 1$; dann ist $g^*(h^l) = h^l$, h^l also G_{Q_j}-invariant. Dann ist h^l lokaler Parameter von $\pi'(Q_j)$, wobei π' die Galoisüberlagerung $C' \longrightarrow C'/G_{Q_j}$ vom Grade $d = |G_{Q_j}|$ bezeichnet. Andererseits ist $\pi'^*(\pi'(Q)) = dQ$, woraus $d | l$ folgt.

Lemma 3.5 in [70] (Pinkham) kann hier so verallgemeinert werden:

4.5 Lemma.
Die einzigen Fixpunkte von Elementen von $G - \{id\}$ auf F' liegen auf den Fasern $F'_{Q_{ij}}$ über den Q_{ij}. $G_{Q_{ij}}$ ist vom Typ $\langle d_i, e_i \rangle$. Liegt $Q \in F'$ außerhalb C', so enthält G_Q nur Spiegelungen.

Beweis. Dazu wird wie in [70] F' und die Wirkung von G auf F' explizit angegeben. $\sum_j Q_{ij}$ liegt in einer offenen analytischen Teilmenge U'_i wie in Lemma 4.3. In U'_i wird D' bis auf einen G-invarianten Faktor durch die lokale Gleichung $h_i^{e_i}$ gegeben. F' wird dann bis auf G-invariante Faktoren durch den Kozyklus $(f_{ij}) = (h_i^{e_i}/h_j^{e_j})$ auf $U'_i \cap U'_j$ definiert. (Eventuell muß $\{U'_i\}_{i=1}^n$ zu zu einer Überdeckung von C' ergänzt werden durch offene Mengen, die keinen der Punkte Q_{ij} enthalten; die zusätzlichen Überlegungen sind trivial.) Dieser definiert die Verklebung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times (U_i' \cap U_j') &\longrightarrow \mathbb{C} \times (U_j' \cap U_i') \\ (c,u) &\longmapsto ((h_j^{e_j}/h_i^{e_i})(u)\cdot c, u) \end{aligned}$$

für F' bis auf G-invariante Abänderung der Transitionsfunktionen $f_{ij} \in \mathcal{O}^*_{C'}(U_i' \cap U_j')$. $g : F' \longrightarrow F'$ ist dann durch

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times U'_i &\longrightarrow \mathbb{C} \times U_i' \\ (c,u) &\longmapsto (a_{g,i}^{e_i}\cdot c, g(u)) \end{aligned}$$

in verträglicher Weise erklärt wegen $g^*(f_{ij}) = a_{g,i}^{e_i} \cdot f_{ij} \cdot a_{g,j}^{-e_j}$. Man sieht sofort, daß nur für Punkte Q der Fasern $F'_{Q_{ij}}$ die stationäre Gruppe G_Q nichttrivial sein kann. Da $a_{g,i}$ für $(g) = G_{Q_{ij}}$ primitive d_i-te Einheitswurzel ist, ist $G_{Q_{ij}}$ vom Typ $\langle d_i, e_i \rangle$. Ist $Q = (c,u) \in F'_{Q_{ij}} - C'$, also $c \neq 0$, so muß für $g \in G_Q$ $a_{g,i}^{e_i} = 1$ gelten, g also die Faser $F'_{Q_{ij}}$ punktweise fixieren. Damit ist g eine Spiegelung.

4.6 <u>Bemerkung</u>. Wir wollen festhalten, daß wir ein Linienbündel F' gefunden haben, auf das $g \in G$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times U_i' &\longrightarrow \mathbb{C} \times U_i' \\ (c,u) &\longmapsto (\zeta_g \cdot c, g(u)) \end{aligned}$$

wirkt, wobei ζ_g Einheitswurzel ist und U_i' eine Überdeckung von C', so daß $F'|U_i'$ trivial ist.

Das Sterntupel, das zu F' und G gehört (gemäß II.3, 4)) hat die Gestalt $(C, ? | P_1, d_1, e_1; \ldots; P_n, d_n, e_n)$. Wir müssen uns davon überzeugen, daß an der noch offenen Stelle b steht. Wir haben

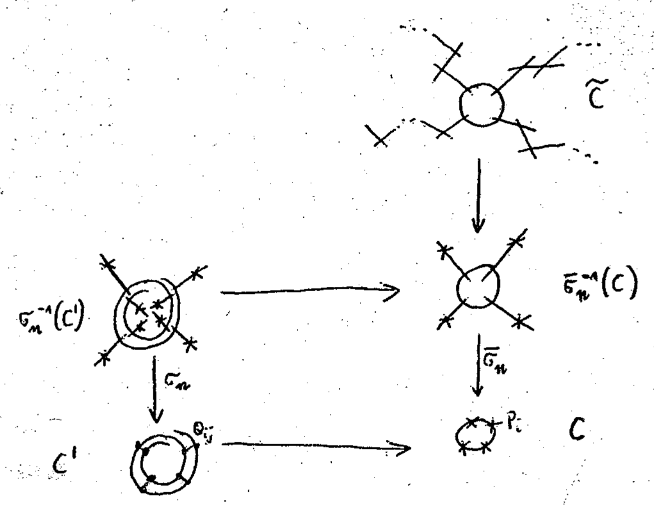
nach II.3, 4) das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{F} \arrow[d] \\ F' \arrow[r] \arrow[d] & F'/G \arrow[d] \\ F'/C' \arrow[r] & (F'/C')/G \end{tikzcd}$$

Die eigentliche Transformierte von $C \subset F'/G$ bei $\tilde{F} \longrightarrow F'/G$ wird ebenfalls mit C bezeichnet, $\tilde{C}$ sei die vollständige Transformierte. Sie ist Urbild der Singularität von $(F'/C')/G$ und wird durch das Sterntupel $(C, -(C^2)_{\tilde{F}} | P_1, d_1, e_1; \ldots; P_n, d_n, e_n)$ beschrieben. Wir haben $-b = (C^2)_{\tilde{F}}$ zu zeigen. Dazu verschieben wir die Singularitäten von F'/G, die sämtlich auf C liegen von der Kurve C weg mit Hilfe des ersten Auflösungsschrittes von Fujiki (siehe Bemerkung 2.10). Mit Hilfe der "singulären Aufblasung" σ_{e_i} in jedem Punkt Q_{ij} erhalten wir eine Fläche $F'_{\#}$ und nach Satz 2.9 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{F} \arrow[d] \\ F'_{\#} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{\#}"'] & F'_{\#}/G \arrow[d, "\bar{\sigma}_{\#}"] \\ F' \arrow[r] & F'/G \end{tikzcd}$$

Für die Kurven ergibt sich dabei folgende Situation :



wobei Singularitäten durch $\times$ und Auflösungskurven durch / angedeutet sind.

$\tilde{F} \longrightarrow F'_*/G$ ist in einer Umgebung von $C_{\tilde{F}}$ bzw. $C_{F'_*/G}$ (eigentliche Transformierte von C) ein Isomorphismus. Daher gilt

$$(C^2)_{\tilde{F}} = (C^2)_{F'_*/G} .$$

σ_* entsteht durch Anwenden von σ_{e_i} in jedem Punkt Q_{ij}. σ_{e_i} wiederum entsteht durch e_i-maliges sukzessives Aufblasen eines Punktes auf C' und anschließende Kontraktion des entstandenen -2 - Baumes (siehe Seite 49). Bei einmaliger Aufblasung $\sigma : F'' \longrightarrow F'$ eines Punktes $Q = Q_{ij} \in C'$ haben wir wegen $\sigma^{-1}(Q) \cdot C' = Q$

$$\rho^{F'}_{C'}(C') = \rho^{F''}_{C'}(\sigma^* C') = \rho^{F''}_{C'}(C' + \sigma^{-1}Q) = \rho^{F''}_{C'}(C') + Q ,$$

also
$$\rho^{F''}_{C'}(C') = \rho^{F'}_{C'}(C') - Q .$$

Daher gilt, da die Kontraktion der -2 - Bäume außerhalb einer Umgebung von C' vorgenommen wird und darum keine Rolle spielt,

$$\rho^{F'_*}_{C'}(C') = \rho^{F'}_{C'}(C') - \sum_i e_i \sum_j Q_{ij} .$$

Übergang von den Divisorenklassen auf C' zu den Linienbündeln ergibt unter Berücksichtigung von $F' = F(D') = F(\rho^{F'}_{C'}(C'))$ und $D' = \pi^{-1}(D) + \sum_i e_i \sum_j Q_{ij}$ (vgl. (4 d)) $= N_{F'/C'}$

$$N_{F'_*/C'} = F_C(\pi^{-1}(D)) .$$

Faktorisieren nach G liefert als Normalenbündel von C = C'/G in F'_*/G

$$N_{(F'_*/G)/C} = F_C(D) ;$$

und weil $\tilde{F}$ und F'_*/G in einer Umgebung von C' isomorph sind, haben wir

$$N_{\tilde{F}/C} = F_C(D)$$

und daher

$$(C^2)_{\tilde{F}} = \deg D = -b .$$

Damit ist der Existenzsatz 4.1 bewiesen.

II.5 Quotienten von Linienbündeln über Kurven vom Geschlecht 0 und 1

Wir befassen uns nun mit den beiden Spezialfällen $C' = \mathbb{P}^1$ bzw. $C' = T$ (elliptische Kurve), d.h. mit Quotienten von Linienbündelsingularitäten längs Galoisüberlagerungen $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ bzw. $T \longrightarrow C$ (C ist $\mathbb{P}^1$ oder ebenfalls elliptische Kurve), und wir ermitteln die Auflösungssterne. Wir benutzen die Hurwitzsche Geschlechtsformel für Kurvenüberlagerungen $C' \longrightarrow C$

$$2g' - 2 = n(2g - 2) + \sum_{Q'} (e_{Q'} - 1)$$

$\underline{\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1}$:

$$(d_1,d_2,d_3) = \begin{cases} (2,2,m) & \text{binäre Diedergruppen} \\ (2,3,3) & \text{binäre Tetraedergruppe} \\ (2,3,4) & \text{binäre Oktaedergruppe} \\ (2,3,5) & \text{binäre Ikosaedergruppe} \end{cases}$$

Dabei sind die binären Gruppen die Urbilder der gewöhnlichen klassischen Gruppen bei dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$SU(2) \longrightarrow \mathbb{O}(3)$$

mit dem Kern $\{\pm 1\}$, siehe Hall [61], Kap. XVI, Abschnitt 10:

$\underline{T \longrightarrow \mathbb{P}^1}$:

läßt sich folgendermaßen realisieren: Sei $T = \mathbb{C}/\Lambda$, Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Sei $\mu : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Multiplikation mit einer Einheitswurzel, die Λ invariant läßt. Dann haben wir das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\wr\mu"] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\mu"] & T \arrow[r] \arrow[d, "\wr\bar{\mu}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Lambda \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

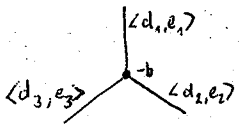
$\bar{\mu}$ erzeugt eine zyklische Gruppe G, die auf T wirkt. Wir können folgende Einheitswurzeln ζ für geeignete Gitter wählen:

$$(d_1,d_2,d_3,d_4) = (2,2,2,2) \quad \text{für } \zeta = -1, \ \Lambda \text{ beliebig}$$

$$(d_1,d_2,d_3) = \begin{cases} (3,3,3) & \zeta \text{ primitive 3. Einh.wurzel}, \ \Lambda = \mathbb{Z}[\zeta] \\ (2,4,4) & \zeta = i = \sqrt{-1} \qquad \Lambda = \mathbb{Z}[i] \\ (2,3,6) & \zeta \text{ primitive 6. Einh.wurzel}, \ \Lambda = \mathbb{Z}[\zeta] \end{cases}$$

Nach dem Existenzsatz 4.1 erhalten wir folgende Auflösungssterne für Quotienten von Linienbündelsingularitäten längs $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ bzw. $T \longrightarrow C$ (T elliptische Kurve, C elliptische Kurve oder $\mathbb{P}^1$),

$\underline{\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1}$:



$$\text{mit } (d_1,d_2,d_3) = \begin{matrix} (2,2,m)\ ,\ m>1 \\ (2,3,3) \\ (2,3,4) \\ (2,3,5) \end{matrix}$$

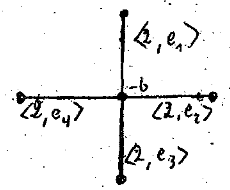
Zentrum $\mathbb{P}^1$, $1 \leq e_i \leq d_i$.

Die Fälle $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{=} \mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ mit zwei Verzweigungspunkten werden dabei durch $d_1 = e_1$, $d_2 = e_2$, $d_3 = e_3$ bzw. $d_1 = e_1$ erfaßt, weil $\langle d,d\rangle$ den kontrahierbaren Arm $|^{-1}$ liefert, so daß man eine kleinere Anzahl von Armen erhalten kann.

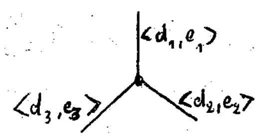
$\underline{T \longrightarrow T/G}$:

Wir können Isogenien vernachlässigen; sie bilden einen Normalteiler G' in der Galoisgruppe G, und wir haben $T/G = (T/G')/(G/G')$, wobei jedes Element von G/G' bei seiner Wirkung auf $T' = T/G'$ stets einen Fixpunkt hat. Wir haben folgende Auflösungssterne:

• $(4,-b) \triangleq (T,-b)$, T elliptische Kurve



Zentrum $\mathbb{P}^1$, $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$



$$(d_1,d_2,d_3) = \begin{cases} (3,3,3) & G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ (2,4,4) & G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ (2,3,6) & G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \end{cases}$$

$1 \leq e_i \leq d_i$

5.1 <u>Satz</u>.

Sei (X,x) eine normale Flächensingularität mit einem Auflösungsgraphen eines Quotienten einer Linienbündelsingularität längs $C' \longrightarrow C$ mit $C' = \mathbb{P}^1$ oder T (elliptische Kurve). Dann ist (X,x) ein solcher Linienbündelsingularitätenquotient.

<u>Beweis</u>. Mit Karras ([64], Definition 4.2) nennen wir die Einbettung einer exzeptionellen Kurve E in eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit starr, wenn für jede biholomorph äquivalente Kurve E' (d.h. genauer: es existiert ein Homöomorphismus von E auf E', der auf jede irreduzible Komponente eingeschränkt biholomorph ist) einer zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit M', so daß die Graphen durch die Biholomorphie induziert äquivalent sind (gleiche Bewertungen an den Ecken der Graphen, die den einander zugeordneten irreduziblen Kurven entsprechen), Umgebungen U von E in M und U' von E' in M' existieren und eine biholomorphe Abbildung $U \xrightarrow{\sim} U'$, die E in E' überführt. Die Auflösungskurven von Quotienten von Linienbündelsingularitäten längs Galoisüberlagerungen $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ haben dieselbe Gestalt wie die in II.3 1) (Quotientensingularitäten) angegebenen. Nach Brieskorn [7] sind diese ~~stets~~ starr eingebettet; siehe auch Tjurina [73], wo das Resultat allgemeiner auch die dreiarmigen Sterne, die von $T \longrightarrow T/G$ herrühren, erfaßt. Unser vierarmiger Stern und die Torussingularität ordnen sich in II.3 2) (Singularitäten mit auflösbarer lokaler Fundamentalgruppe) ein. Für diese exzeptionellen Kurven wurde der Starrheitssatz von Karras ([64], Satz 4.1 a) bewiesen.

Nach Voraussetzung und den Starrheitssätzen wird nun eine geeignete (nicht notwendig minimale) Auflösungskurve von (X,x)

durch die Auflösungskurve eines Linienbündelsingularitätenquotienten längs einer Galoisüberlagerung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ oder $T \longrightarrow T/G$ biholomorph erfaßt, und diese Biholomorphie läßt sich auf Umgebungen der Kurven ausdehnen, so daß die beiden Singularitäten gleich sind.

5.2 <u>Satz</u>. Die Quotienten der Linienbündelsingularitäten längs der Galoisüberlagerungen $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ sind genau die Quotientensingularitäten (im gewöhnlichen Sinne, d.h. Quotienten des regulären Punktes).

5.3 <u>Bemerkung.</u> Wir benutzen beim Beweis nicht die Klassifikationsergebnisse für Quotientensingularitäten, die von Brieskorn in [7] zusammengefaßt wurden. Auch der Starrheitssatz kann einer anderen Arbeit, nämlich [73] (Tjurina) entnommen werden, in der ausschließlich mit dem Auflösungsgraphen gearbeitet wird. Betrachtungen über die lokale Fundamentalgruppe und Klassifikation endlicher Untergruppen von $Gl_2(\mathbb{C})$ können so vollends gemieden werden, um die Quotientensingularitäten durch ihre Auflösungsgraphen zu charakterisieren.

<u>Beweis</u> von 5.2.

(i) Jede Quotientensingularität ist Quotient einer Linienbündelsingularität längs einer Galoisüberlagerung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$:

Sei o.B.d.A. die Quotientensingularität durch $\mathbb{C}^2/G$, G endliche Untergruppe von $Gl_2(\mathbb{C})$, gegeben. $\mathbb{C}^*$ wird mit dem Zentrum $\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\right\}$ von $Gl_2(\mathbb{C})$ identifiziert. Sei $Z = G \cap \mathbb{C}^*$. Dann ist Z zentraler Normalteiler in G. Blasen wir den 0-Punkt zu einer exzeptionellen Geraden L auf in $\mathbb{C}^2$, so wirken genau die Elemente von Z identisch auf L. Wie im Beweis von 2.7 haben

wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathbb{C}}^2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & \mathbb{C}^2 \arrow[d] \\ \tilde{\mathbb{C}}^2/Z \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{C}^2/Z \end{tikzcd}$$

mit dem Linienbündel $F = \tilde{\mathbb{C}}^2/Z$ über L mit $(L^2)_F < 0$. Faktorisieren wir τ nach $\bar{G} = G/Z$, so erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathbb{C}^2/Z \arrow[d, "\text{Fakt. nach } \bar{G}"] \\ F/\bar{G} \arrow[r, "\tau/\bar{G}"'] & \mathbb{C}^2/G = (F/L)/\bar{G} \end{tikzcd}$$

Damit ist die Singularität von $\mathbb{C}^2/G$ Quotient der Linienbündelsingularität von F/L längs der Galoisüberlagerung $L \cong \mathbb{P}^1 \longrightarrow L/\bar{G} \cong \mathbb{P}^1$.

Nun zeigen wir die Umkehrung.

(ii) Jeder Quotient einer Linienbündelsingularität längs einer Galoisüberlagerung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ist Quotientensingularität.

Wir schicken eine Überlegung aus der algebraischen Topologie voraus.

5.4 <u>Lemma</u>.

$U \xrightarrow{\pi} X$ sei universelle Überlagerung der analytischen Mannigfaltigkeit X mit der Gruppe Z (biholomorpher) Decktransformationen, $X = U/Z$. Ist $\bar{G}$ eine Gruppe biholomorpher Abbildungen von X auf sich, so läßt sich $\bar{G}$ in eindeutiger Weise zu einer Gruppe G biholomorpher Abbildungen von U liften, die Z als Normalteiler enthält.

<u>Beweis</u>. Ist $Y \xrightarrow{f} X$ eine stetige Abbildung, $y \in Y$, $x = f(y)$,

$\tilde{x} \in U$ mit $\pi(\tilde{x}) = x$, Y lokal linear zusammenhängend und einfach zusammenhängend, so existiert genau eine stetige Abbildung $Y \xrightarrow{\tilde{f}} U$ mit $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$, $\pi \circ \tilde{f} = f$; siehe z. B. Hilton, Wylie [62], 6.6.13. Auf $f = \bar{g} \circ \pi$, $\bar{g} \in \bar{G}$ angewandt, ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & U \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\bar{g}"'] & X \end{tikzcd}$$

wobei g bis auf Multiplikation mit einem Element aus Z eindeutig bestimmt ist. Für jede Liftung g' von $\bar{g}^{-1}$ erhält man $g' \circ g$, $g \circ g' \in Z$, so daß g bijektiv ist. Die Biholomorphie von g ergibt sich aus der lokalen Isomorphie von U und X. $G = \dot{\bigcup}_{\bar{g} \in \bar{G}} gZ$ erfüllt alle Eigenschaften.

Nun zu (ii). Sei $F \longrightarrow \mathbb{P}^1 = L$ ein Linienbündel mit Nullschnitt L, $(L^2)_F < 0$, $\bar{G}$ endliche Gruppe, die effektiv auf L wirkt.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & F/\bar{G} \arrow[d] \\ F/L \arrow[r] & (F/L)/\bar{G} \end{tikzcd}$$

Wir zeigen, daß die Singularität von $(F/L)/\bar{G}$ durch $(\mathbb{C}^2/G, p(0))$ erhalten werden kann mit Hilfe einer endlichen Gruppe G, $p: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/G$. Wegen Pic $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{Z}$, werden die Isomorphieklassen von Linienbündeln durch den Selbstschnittindex des Nullschnittes charakterisiert. Also können wir (siehe 2.7, 2.8) $F = \mathbb{C}^2/Z$, Z vom Typ $\langle d,1\rangle$ annehmen. $\mathbb{C}^2 \setminus 0 \xrightarrow[\text{Fakt. nach } Z]{} F \setminus L$ ist dann nach Bemerkung 2.8 eine universelle Überlagerung und

$\bar{G}$ wirkt biholomorph auf $F \setminus L$. Nach Lemma 5.4 können wir $\bar{G}$ zu einer Gruppe G liften, die Z als Normalteiler enthält. Die exakte Folge

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 1$$

zeigt, daß G eine endliche Gruppe ist. Außerhalb des Linienbündelsingularitätenquotienten Q von $(F/L)/\bar{G}$ haben wir die Isomorphie

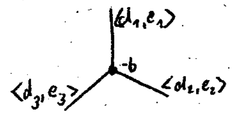
$$(\mathbb{C}^2 \setminus 0)/G \xrightarrow{\sim} ((F/L)/\bar{G}) \setminus Q ,$$

die sich zu $\quad \mathbb{C}^2/G \xrightarrow{\sim} (F/L)/\bar{G} \quad$ fortsetzt.

Als Folgerung erhalten wir das zusammenfassende

5.5 <u>Theorem</u>. (Klassifikation der Quotientensingularitäten durch Auflösungsgraphen).

Jede Quotientensingularität hat eine (nicht notwendig minimale) Auflösungskurve, deren zugehöriger Auflösungsgraph folgende Sternform hat:



$$(d_1,d_2,d_3) = \begin{cases} (2,2,m) & m \geq 2 \\ (2,3,3) \\ (2,3,4) \\ (2,3,5) \end{cases} \qquad 1 \leq e_i \leq d_i$$

Jede normale Flächensingularität, die eine solche Auflösung hat, ist eine Quotientensingularität.

Die nichtzyklischen Quotientensingularitäten sind dadurch charakterisiert, daß sie einen minimalen Auflösungsstern der obigen Form haben, d.h. $d_i \geq 2$, $(d_i,e_i) = 1$, $i = 1,2,3$.

Ist $b' = |\bar{G}|(b - \sum_{i=1}^{3} e_i/d_i)$ mit

$$\bar{G} = \begin{cases} \text{binäre Diedergruppe des m-Ecks}, & (d_1,d_2,d_3)=(2,2,m),\ |\bar{G}| = 4m \\ \text{binäre Tetraedergruppe}, & (d_1,d_2,d_3) = (2,3,3),\ |\bar{G}| = 24 \\ \text{binäre Oktaedergruppe}, & (d_1,d_2,d_3) = (2,3,4),\ |\bar{G}| = 48 \\ \text{binäre Ikosaedergruppe}, & (d_1,d_2,d_3) = (2,3,5),\ |\bar{G}| = 120 \end{cases}$$

$Z = \langle b', 1\rangle$, so läßt sich die Quotientensingularität mit Auflösungssterntupel $(\mathbb{P}^1, b; P_1, d_1, e_1; P_2, d_2, e_2; P_3, d_3, e_3)$, wobei (d_1,d_2,d_3) eines der eben aufgezählten Tripel ist, durch $\mathbb{C}^2/G$ realisieren mit einer Gruppenerweiterung von Z mit $\bar{G}$:

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow G \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 1$$

Zusammen mit den exakten Klassifikationsresultaten von Brieskorn mit Hilfe von kleinen (d.h. spiegelungsfreien) Untergruppen von $Gl_2(\mathbb{C})$ wird uns unsere Formulierung 5.5, die die Spiegelungen berücksichtigt, helfen, die (wie gezeigt wird) endlich vielen möglichen Typen stationärer Gruppen Γ_x imaginärquadratischer arithmetischer Gruppen $\Gamma \subset SU(\Phi, \mathbb{C})$ in Punkten $x \in B^2$ zu ermitteln.

II.6 Kugelspitzensingularitäten

6.1 Allgemeine Definition.

Sei $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\eta]\ ;\ \eta \in \mathbb{C},\ |\eta| = 1 \right\}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & i\bar{a} & \frac{i}{2}|a|^2+r \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [a,r];\ a \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R} \right\}$

Wir betrachten Gitter Γ im halbdirekten Produkt $N\cdot U$. Dabei verstehen wir unter einem Gitter $\Gamma \subset N\cdot U$ eine diskrete Untergruppe, für die $N\cdot U/\Gamma$ kompakt ist. Sei $\Gamma_u = \Gamma \cap U$. Da $N \cong SO(2)$ kompakt ist, gilt:

Γ ist Gitter in $N\cdot U \Longleftrightarrow \Gamma_u$ ist Gitter in U und Γ/Γ_u endlich

Γ/Γ_u ist in diesem Fall eine endliche zyklische Gruppe. $N\cdot U$ wirkt auf das Siegelgebiet 2. Art

$$V = \{(z,u) \in \mathbb{C}^2;\ 2\mathrm{Im}\, z - |u|^2 > 0\}$$

(siehe I.4, $V = D$), und jedes Element von $N\cdot U$ führt die offenen Mengen

$$V_C = \{(z,u) \in \mathbb{C}^2;\ 2\mathrm{Im}\, z - |u|^2 > C\}, \quad C \geq 0$$

in sich über. Genau haben wir die Wirkung

$$[\eta][a,r](z,u) = (z + i\bar{a}u + \tfrac{i}{2}|a|^2 + r,\ \eta(u+a)) \tag{6a}$$

6.1.1 **Lemma.**

Sei $\bar{\gamma}$ biholomorphe Abbildung von V auf sich mit der Eigenschaft $\bar{\gamma}(V_C) = V_C$ für alle $C \geq 0$. Dann ist $\bar{\gamma} = \mathbb{P}\gamma$ für ein $\gamma \in N\cdot U$. Es gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Die Umkehrung ist trivial. Sei $\bar{\gamma}(V_C) = V_C$ für alle $C \geq 0$. Wegen $\bar{\gamma} \in \mathrm{Aut}_{hol} V$ existiert nach I.3 ein $\beta \in SU(\Psi, \mathbb{C})$ mit $\mathbb{P}\beta = \bar{\gamma}$. β führt ∂V_C in ∂V_C und speziell ∂V in ∂V über. Wir zeigen

$$\infty = \mathbb{P}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{V}_C \cap \partial V, \quad C > 0,$$

wobei der Abschluß in $\mathbb{P}\mathbb{C}^3$ zu nehmen ist. Dann folgt $\beta(\infty) = \infty$ und $\beta \in P_\infty = M_\infty \cdot A_\infty \cdot U_\infty$ (Bezeichnungen von I.4), und aus $\beta(V_C) = V_C$ folgt leicht $\beta \in M_\infty \cdot U_\infty$. Da $N\cdot U \cong \mathbb{P}(N\cdot U) = \mathbb{P}(M_\infty \cdot U)$ ist, existiert ein $\gamma \in N\cdot U$ mit $\mathbb{P}\gamma = \mathbb{P}\beta = \bar{\gamma}$. Also bleibt zu zeigen, daß für $C > 0$ $\bar{V}_C \cap \partial V = \{\infty\}$ gilt.

In der affinen (z,u)-Ebene $\subset \mathbb{P}\mathbb{C}^3$ liegt kein Punkt des Durchschnitts $\bar{V}_C \cap \partial V$, weil $\bar{V}_C$ dort durch $2\mathrm{Im}\, z - |u|^2 \geq C$ beschrieben wird. Also kommen nur Punkte der unendlich fernen Geraden

$\left\{\mathbb{P}\begin{pmatrix} z\\u\\0\end{pmatrix} ; z,u \in \mathbb{C}\right\}$ in Betracht. Ist $u \neq 0$, so ist $\mathbb{P}\begin{pmatrix} z\\u\\1\end{pmatrix} = \mathbb{P}\begin{pmatrix} z/u\\1\\1/u\end{pmatrix}$. Setzen wir $v = z/u$, $w = 1/u$, so geht die Bedingung $2\mathrm{Im}\, z - |u|^2 \geq C$ in $2 \cdot \mathrm{Im}\, v\bar{w} \geq 1 + C|w|^2$ über, die für kein Element der unendlich fernen Geraden $w = 0$ erfüllt ist. Demzufolge muß $u = 0$ sein, und wir haben $\mathbb{P}\begin{pmatrix} 1\\0\\0\end{pmatrix}$ als einzigen Punkt in $\bar{V}_C \cap \partial V$.

q.e.d.

Sei Γ Gitter in $M \cdot U$. Jedes Element von $\gamma \in \Gamma$ hat nur Einheitswurzeln als Eigenwerte. Aus Satz I.8.4 folgt leicht, daß γ Spiegelung ist oder fixpunktfrei auf V wirkt. Γ wirkt eigentlich diskontinuierlich auf V. V/Γ ist damit komplex-analytische Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Sei

$$\widehat{V/\Gamma} = ((V/\Gamma) \cup \{\infty\})/\Gamma = (V/\Gamma) \cup \{\hat{\infty}\} .$$

"lokale Kompaktifizierung" von V/Γ. Verwenden wir als Umgebungsbasis von $\hat{\infty}$ die $(V_C/\Gamma) \cup \{\hat{\infty}\}$, $C \geq 0$, so ist $\widehat{V/\Gamma}$ normaler komplexer Raum der Dimension 2 mit höchstens einer Singularität, nämlich $\hat{\infty}$. Die eindeutige Fortsetzbarkeit der analytischen Struktur von V/Γ auf $\widehat{V/\Gamma}$ folgt aus dem Fortsetzungssatz von H. Cartan in [55]. Die Konstruktion ist in allgemeinerer Form in [39] enthalten; siehe auch I.9.

6.1.2 <u>Definition</u>. Eine normale komplexe zweidimensionale Singularität (X,x) heißt Kugelspitzensingularität, wenn sie analytisch äquivalent ist zu $(\widehat{V/\Gamma}, \hat{\infty})$ für ein Gitter Γ in $N \cdot U$ (auch der reguläre Punkt ist zugelassen).

6.2 Torsionsfreie nilpotente Gruppen vom Rang 3

6.2.1 <u>Definition</u> (Raghunathan). Eine nilpotente Gruppe vom

Rang n ist eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe Γ, für die es eine Filtrierung

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \dots \supset \Gamma_k = \{1\}$$

gibt mit:

Γ_i ist Normalteiler von Γ_{i-1} für $i = 1,\dots,k$,

Γ_{i-1}/Γ_i ist abelsch für $i = 1,\dots,k$ und $n = \sum_{1 \leq i \leq k} \mathrm{rank}(\Gamma_{i-1}/\Gamma_i)$

Raghunathan ([41], Satz 2.8) hat gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen Γ_{i-1}/Γ_i stets endlich erzeugt ist und der Rang n nicht von der Wahl der obigen Filtrierung abhängt.

Jede torsionsfreie endlich erzeugte nilpotente Gruppe Γ ist isomorph zu einem Gitter einer einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie - Gruppe U (Raghunathan [41], Theorem 2.18). Die Dimension von U kann dabei als Rang von Γ gewählt werden ([41], Theorem 2.10). Ist der Rang von Γ 3, so gibt es bis auf Isomorphie genau zwei einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppen der Dimension 3, nämlich die abelsche $\mathbb{R}^3$ und eine nichtabelsche. Es existieren nämlich wie man leicht sieht nur zwei Isomorphieklassen von nilpotenten Lie-Algebren der Dimension 3, die gerade den beiden Fällen entsprechen, in denen alle Strukturkonstanten verschwinden oder (genau) eine nicht. Also ist eine torsionsfreie nilpotente Gruppe vom Rang 3 isomorph zu einem Gitter in $\mathbb{R}^3$, d.h. $\Gamma \cong \mathbb{Z}^3$ oder isomorph zu einem Gitter unserer Gruppe $U = U_\infty$. Da $\mathbb{R}^3$ bzw. U der Zariskiabschluß des eingelagerten Gitters Γ ist (im Sinne von [41]), trennen sich die zwei Fälle Γ abelsch oder nichtabelsch durch ihre Einbettbarkeit als Gitter in $\mathbb{R}^3$ oder in U. Wir bestimmen die Isomorphieklassen nilpotenter torsionsfreier Gruppen Γ vom Rang 3.

Wie in I.6 gezeigt wurde hat Γ einen zentralen Normalteiler $\Delta \cong \mathbb{Z}$, und es existiert eine exakte Folge

$$1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1$$

Damit definiert Γ ein Element von $H^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$. Diese Gruppe klassifiziert die Kongruenzklassen von Gruppenerweiterungen von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}^2$ bei trivialer Wirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{Z}$ (siehe Mac Lane [66], IV, 4.7). Diese Gruppenerweiterungen sind offenbar torsionsfreie nilpotente Gruppen vom Rang 3. Es gilt $H^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, siehe 1. Lemma in Kap. I, § 2 von Mumfords Arbeit [67]. Die torsionsfreien nilpotenten Gruppen Γ vom Rang 3 lassen sich bis auf Isomorphie mit Hilfe dreier Erzeugender κ, β, γ klassifizieren:

$$\kappa \text{ erzeugt } \Delta \cong \mathbb{Z}, \quad \pi(\beta), \pi(\gamma) \text{ erzeugen } \Gamma/\Delta \cong \mathbb{Z}^2 \qquad (6b)$$

Jedes Element von Γ hat die eindeutige Darstellung $\beta^b \gamma^c \kappa^d$, $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Die Gruppenstruktur ist eindeutig bestimmt durch die folgende natürliche Zahl t :

$t = \frac{2|b,c|}{q}$

$$\beta^{-1}\gamma\beta = \cancel{\gamma}\kappa^t, \quad t \in \mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots \qquad (6c)$$

(Ist t negativ, so ersetze man κ durch κ^{-1}). Dieses t legt die Isomorphieklasse fest. Γ ist nichtabelsch, also isomorph zu einem Gitter in U, genau dann, wenn $t \neq 0$. Zusammenfassend gilt:

6.2.2 Für jede natürliche Zahl $t > 0$ existiert bis auf Isomorphie genau eine torsionsfreie nilpotente Gruppe vom Rang 3. Die Gitter in U sind genau die treuen Darstellungen dieser Gruppen Γ_t in U.

6.3 Parametrisierung der Linienbündelklassen über elliptischen Kurven durch Gitter in U

Wir betrachten die exakte Folge

$$1 \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cong}}{[U,U]} \longrightarrow U \longrightarrow \underset{\underset{\mathbb{C}}{\cong}}{U/[U,U]} \longrightarrow 1$$

und identifizieren durch die Zuordnung $[a,r] \bmod [U,U] \longmapsto a$ $U/[U,U]$ mit $\mathbb{C}$. Für ein Gitter Γ in U mit $\Delta = \Gamma \cap [U,U]$ ist dann $\Lambda = \Gamma/\Delta$ ein wohldefiniertes Gitter in $\mathbb{C}$. Ist $\kappa, \beta = [b,\tau]$ besser statt κ $\gamma = [c,s]$ ein Erzeugendensystem von Γ mit den Eigenschaften (6b), (6c) und gilt außerdem

$$|b,c| \underset{Df}{=} \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} > 0, \qquad (6d)$$

wobei $b = b_1 + b_2 i$, $c = c_1 + c_2 i$, so wollen wir das Tripel (β, γ, κ) ausgezeichnete Basis von Γ nennen. Offenbar existiert eine solche immer. Ist $\kappa = [0,q]$, so gilt wegen (6c)

$$q = 2|b,c|/t > 0. \qquad (6e)$$

Nun definieren wir für Γ mit Hilfe der obigen ausgezeichneten Basis eine negativ definite hermitesche Form

$$H: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (u,v) \longmapsto -\frac{2}{q} u\bar{v} \qquad (6f)$$

$t = \operatorname{Im}\left(-\frac{2}{q} b\bar{c}\right)$

und einen Quasi-Charakter ~~Homomorphismus~~

$$\alpha : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}_1^* \qquad (6g)$$

durch $b \longmapsto e^{2\pi i r/q}$, $c \longrightarrow e^{2\pi i s/q}$

und die Bedingung

$$\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) = e^{i\pi \operatorname{Im} H(\lambda_1, \lambda_2)} \alpha(\lambda_1)\alpha(\lambda_2), \ \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda = \Gamma/\Delta \qquad (6h)$$

Mit den obigen Bezeichnungen haben wir mit $H = H(\Gamma)$, $\alpha = \alpha(\Gamma)$ (siehe (6f), (6g))

$$F(\Gamma)/\cong \; = \; \mu_\Lambda(H,\alpha) \tag{6l}$$

Der Nullschnitt $T = T(\Gamma)$ von $F(\Gamma)$ hat negativen Selbstschnittindex

$$(T^2) = -t \tag{6m}$$

Wir betrachten dazu $F^* = F(-H,-\alpha)$. $-H$ ist positiv definit, und für F^* gilt daher wiederum nach [67], Kap. I, § 3

$$\dim H^0(T,F^*) = \sqrt{\det(-\operatorname{Im} H)} = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{vmatrix}} = t$$

Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt sofort

$$\deg F^* = \dim H^0(T,F^*) = t$$

und damit unter Verwendung von (4c)

$$(T^2)_F = \deg F = -\deg F^* = -t \; .$$

Sei $\mathrm{Pic}^- T$ die Halbgruppe der Isomorphieklassen von Linienbündeln über T mit negativem Nullschnitt. Dann gilt

6.3.2 Satz.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Gitter in } U\} & \longrightarrow & \bigcup\limits_{\substack{\Lambda\ \text{Gitter} \\ \text{in } \mathbb{C}}} \mathrm{Pic}^-(\mathbb{C}/\Lambda) \\ \Gamma & \longmapsto & F(\Gamma) \end{array}$$

ist eine surjektive Abbildung.

Das bedeutet, daß sich alle Linienbündelklassen über elliptischen Kurven mit negativer Selbstschnittzahl des Nullschnittes durch Gitter in U in der angegebenen Weise parametrisieren lassen.

Beweis. Nach (6l) und dem Satz von Appel-Humbert ist zu zeigen, daß durch die Zuordnung $\Gamma \longmapsto (\Lambda, H, \alpha)$ alle möglichen Tripel mit negativ definiten H erfaßt werden. Ist (Λ, H, α) gegeben, so läßt sich für $H: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$ finden, so daß $H(u,v) = -\frac{2}{q}u\bar{v}$. Λ wird durch $b, c \in \mathbb{C}$ aufgespannt, o.B.d.A. $|b,c| > 0$. $r, s \in \mathbb{R}$ sind durch $\alpha(b) = e^{2\pi i r/q}$, $\alpha(c) = e^{2\pi i s/q}$ bis auf ganzzahlige Vielfache von q eindeutig bestimmt. Γ sei das Gitter von U, das durch $\beta = [b,r]$, $\gamma = [c,s]$, $\kappa = [0,q] \in [U,U]$ erzeugt wird. Dann erhalten wir mit $\Lambda = \Gamma/\Delta$, (6e), (6f), (6g) genau unser Ausgangstripel (Λ, H, α) zurück.

6.4 Kugelspitzensingularitäten als Quotienten von Linienbündelsingularitäten

Sei Γ Gitter in $N\cdot U$; $\Gamma_u = U \cap \Gamma$ ist Gitter in U, $\Delta = \Gamma \cap [U,U]$ ist Gitter in $[U,U]$, isomorph zu $\mathbb{Z}$. Damit haben wir folgende Filtrierung von Γ durch Normalteiler

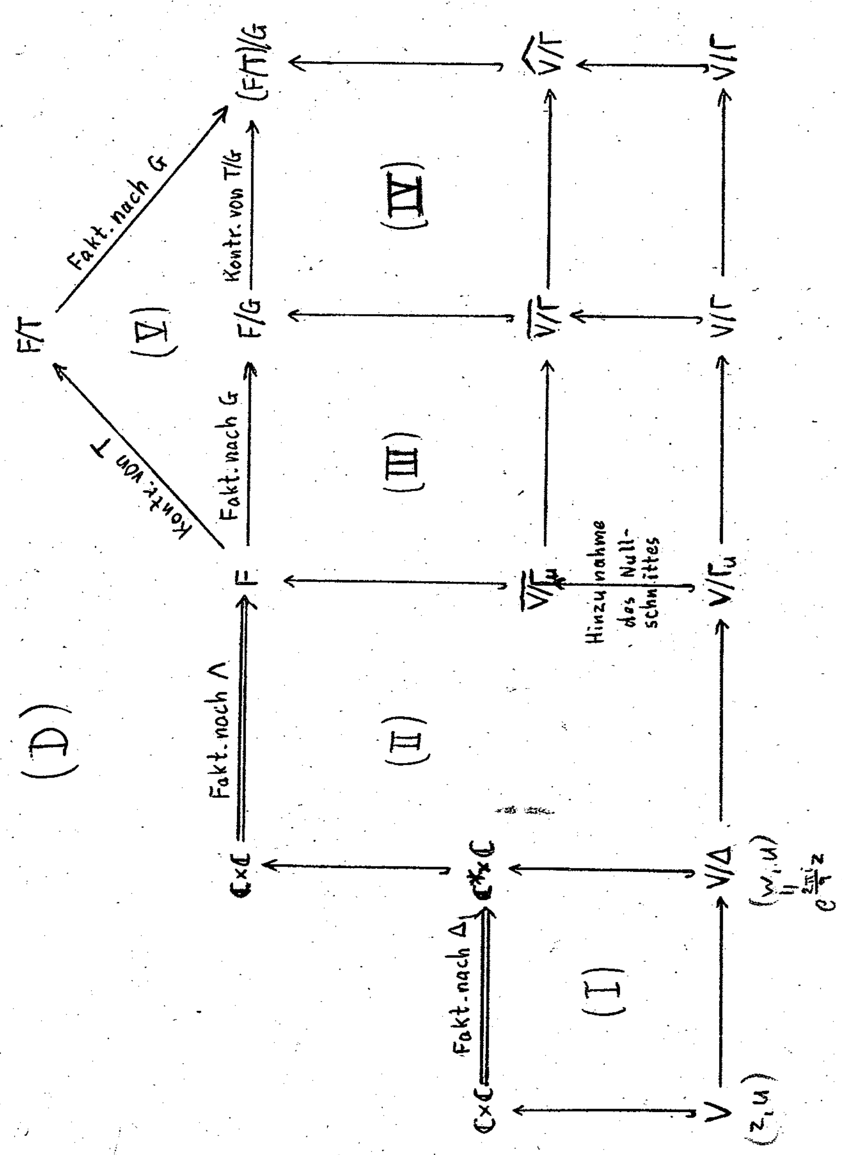
$$\Delta \subset \Gamma_u \subset \Gamma$$

mit den Faktorgruppen (siehe 6.3 und 6.1)

$\Lambda = \Gamma_u/\Delta$ Gitter in $\mathbb{C}$, $G = \Gamma/\Gamma_u$ zyklisch endlicher Ordn.

Mit $F = F(\Gamma)$, $T = \mathbb{C}/\Lambda$ Nullschnitt von $F(\Gamma)$ wird das folgende kommutative Diagramm (D) aufgebaut:

siehe nächste Seite !



<u>Diagramm</u> (I): Da die Elemente von Γ affine Abbildungen sind (siehe (6a)), läßt sich die Wirkung von Γ auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ fortsetzen. Sei $\Delta = ([0,q])$. Nach (6a) gilt

$$[0,q](z,u) = (z+q,u)$$

Die Wirkung von Δ beschränkt sich also auf dem ersten Faktor von $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Sei

$$e:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$$
$$(z,u) \longmapsto (e^{2\pi iz/q},u)$$

Dann ist $e(\mathbb{C}\times\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*\times\mathbb{C} \cong \mathbb{C}\times\mathbb{C}/\Delta$ und wir erhalten das Diagramm (I).

<u>Diagramm</u> (II): $\Lambda = \Gamma_u/\Delta$ wirkt zunächst auf $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$. Für $\lambda\in\Lambda$ bezeichnen wir die Wirkung von λ auf $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ mit φ_λ. λ ist Bild eines Elementes $[\lambda,r_\lambda]\in\Gamma_u$ bei der Faktorisierung $\Gamma_u \longrightarrow \Lambda$. Wir berechnen die Wirkung von φ_λ. Sei $(w,u)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$, $w = e^{2\pi iz/q}$. Es gilt mit den Bezeichnungen von 6.3 ($\Gamma_u \longrightarrow (\Lambda,H_\alpha)$)

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(w,u) &= \varphi_\lambda e(z,u) = e([\lambda,r_\lambda](z,u)) = \\ &= e(z+i\bar{\lambda}u+\tfrac{1}{2}i|\lambda|^2+r_\lambda, u+\lambda) \\ &= (e^{2\pi ir_\lambda/q}e^{\pi[-2u\bar{\lambda}/q-|\lambda|^2/q]}\cdot w, u+\lambda),\end{aligned}$$

$$\varphi_\lambda(w,u) = (\alpha(\lambda)\cdot e^{\pi H(u,\lambda)+\pi H(\lambda,\lambda)/2}\cdot w, u+\lambda) \qquad (6n)$$

Im letzten Umformungsschritt wurde $\alpha(\lambda) = e^{2\pi ir_\lambda/q}$ benutzt, was sofort bewiesen wird:

Sei $\lambda = gb+hc$, $g,h\in\mathbb{Z}$, $\Lambda = \mathbb{Z}b+\mathbb{Z}c$, $([0,q],[b,r],[c,s])$ ausgezeichnete Basis von Γ_u. Nach (6h) gilt

$$\alpha(\lambda) = e^{i\pi\,\mathrm{Im}\,H(gb,hc)}\cdot e^{\frac{2\pi i}{q}(gr+hs)} = e^{i\pi gh\,\mathrm{Im}\,H(b,c)}\cdot e^{\frac{2\pi i}{q}(gr+hs)}$$

Wir können o.B.d.A. $[\lambda,r_\lambda] = [b,r]^g\cdot[c,s]^h$, also $r = gr+hs-gh|b,c|$

annehmen. Dann folgt aus (6e) und (6i)

$$\alpha(\lambda) = e^{i\pi ght}e^{2\pi i(gr+hs)/q} = e^{-i\pi ght}e^{2\pi i(gr+hs)/q} = e^{2\pi i(gr+hs-gh|b,c|)/q} = e^{2\pi ir_\lambda/q}.$$

Damit läßt sich die Wirkung von φ_λ auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ fortsetzen. Sie stimmt mit der Wirkung (6k) überein, so daß $\mathbb{C}\times\mathbb{C}/\Lambda = F(\Gamma)$ ist. Damit erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\times\mathbb{C} \arrow[r, "\text{Fakt. nach }\Lambda"] & F \\
\mathbb{C}^*\times\mathbb{C} \arrow[u] & \\
V/\Delta \arrow[u] \arrow[r] & V/\Gamma_u \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

$(\mathbb{C}\times\mathbb{C})\setminus(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C})$ wird bei dieser Faktorisierung auf den Nullschnitt $T = (0\times\mathbb{C})/\Lambda \cong \mathbb{C}/\Lambda$ von F abgebildet.

Wir untersuchen die Bilder von V und allgemeiner von $V_C = \{(z,u)\in\mathbb{C}^2;\ 2\,\mathrm{Im}\,z-|u|^2>C\}$, $C\geq 0$. bei der Faktorisierung nach Γ_u. Zunächst ist

$$V_C/\Delta = e\{(z,u)\in\mathbb{C}^2;\ \infty>2\,\mathrm{Im}\,z>|u|^2+C\},$$
$$V_C/\Delta = \{(w,u)\in\mathbb{C}^2;\ 0<|w|<e^{-\pi(|u|^2+C)/q}\} \qquad (6o)$$

Faktorisieren nach Λ zeigt, daß V_C/Γ_u ein Lochscheibenbündel über T ist. Passen wir in V_C/Γ_u den Nullschnitt $T = 0\times\mathbb{C}/\Lambda$ ein, so erhalten wir ein Scheibenbündel $\overline{V_C/\Gamma_u}$, das offene analytische Umgebung des Nullschnittes T in F ist. Für C = 0 ist $\overline{V/\Gamma_u}$ der noch fehlende Teil im Diagramm (II).

<u>Diagramme</u> (III), (IV): Die Elemente von Γ/Δ wirken auf $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C} = \mathbb{C}\times\mathbb{C}/\Delta$. Diese Wirkung läßt sich wie für Γ_u/Δ unter Benutzung von (6a) auf $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ fortsetzen. Dabei bleibt $0\times\mathbb{C}$ invariant. $G = \Gamma/\Gamma_u$ wirkt damit auf F. Die Elemente g von G lassen

den Nullschnitt $T = (0 \times \mathbb{C})/\Lambda$ invariant. Aus (6a) kann man ablesen, daß G effektiv auf T wirkt, so daß

$$F \longrightarrow F/G$$

eine Faktorisierung längs der (zyklischen) Galoisüberlagerung

$$T \longrightarrow T/G$$

ist. Der Kopf der Diagramme (III), (IV)

$$\begin{tikzcd} & F/T \arrow[dr, "\text{Fakt. nach } G"] & \\ F \arrow[ur, "\text{Kontr. } T"] \arrow[dr, "\text{Fakt. nach } G"'] & & (F/T)/G \\ & F/G \arrow[ur, "\text{Kontr. } T/G"'] & \end{tikzcd}$$

ist Diagramm (1) in Abschnitt 1. Der untere Teil der Diagramme (III), (IV) ergibt sich durch Einschränkung auf $\overline{V/\Gamma_u}$ bzw. V/Γ_u. Das Bild von $\overline{V/\Gamma}$ bei der Kontraktion von T/G unterscheidet sich von V/Γ um einen Punkt, nämlich um diese Kontraktion. Da die Singularität durch ihre Umgebung V/Γ eindeutig bestimmt ist, muß $\overline{V/\Gamma}/(T/G) = \widehat{V/\Gamma}$ sein. Daraus ergibt sich

6.4.1 Satz. Jede Kugelspitzensingularität ist Quotient einer Linienbündelsingularität längs einer Galoisüberlagerung $T \longrightarrow T/G$ mit einer elliptischen Kurve T.

6.5 Quotienten von Toruslinienbündelsingularitäten als Kugelspitzensingularitäten

Sei (X,x) Quotient einer Toruslinienbündelsingularität längs der Galoisüberlagerung $T \longrightarrow T/G$. Nach den Ausführungen in

II.5 ist der Auflösungsgraph ein Stern der dort beschriebenen Form, und wir können $G \cong \{id\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ annehmen, ferner $T = \mathbb{C}/\Lambda$; das erzeugende Element von G wirkt als Multiplikation mit einer Einheitswurzel auf $\mathbb{C}$, wobei Λ in sich überführt wird. Nach dem Existenzsatz 4.1 und der anschließenden Bemerkung läßt sich (X,x) folgendermaßen realisieren: Es existiert ein Linienbündel L über T und eine Fortsetzung von G auf L, so daß (X,x) G-Quotient der Linienbündelsingularität von L/T ist. Ferner existiert eine Überdeckung $\{U\}$ von T durch G-invariante offene Mengen, so daß $L|U \cong \mathbb{C} \times U$ und jedes $g \in G$ als Multiplikation mit einer Einheitswurzel auf die Fasern wirkt: $g: (c,u) \longmapsto (\zeta c, g(u))$. Ist F ein zu L isomorphes Linienbündel über T, so läßt sich die Wirkung von G auf F übertragen, wobei alle genannten Eigenschaften erhalten bleiben. Nach Satz 6.3.2 können wir daher $L = F = F(\Gamma_u)$ für ein Gitter Γ_u von U annehmen. Wir bauen nun das Diagramm (D) erneut auf. Teil (I), (II) und (V) ergeben sich sofort. (X,x) ist die Singularität von (F/T)/G. Die Doppelpfeile in (I) und (II) sind universelle Überlagerungen. Nach dem Lemma 5.4 läßt sich die Gruppe G, die auf F operiert, liften zu einer Gruppe $\overline{\Gamma}$ von biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ auf sich, so daß $\overline{\Gamma}$ die Fundamentalgruppe Γ_u/Δ von F als Normalteiler enthält. Da G auf $T = (0 \times \mathbb{C})/\Lambda$ wirkt, lassen die Elemente von $\overline{\Gamma}$ das Urbild $0 \times \mathbb{C}$ von T und damit auch das Komplement $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ invariant. Wiederum nach Lemma 5.4 läßt sich $\overline{\Gamma}$ längs der universellen Überlagerung $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \Longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ in Diagramm (I) zu einer Gruppe Γ biholomorpher Abbildungen von $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ auf sich liften, die Δ als Normalteiler enthält. $\Gamma_u/\Delta \subset \overline{\Gamma}$ wird dabei zu Γ_u geliftet (Eindeutigkeitsaussage von Lemma 5.4), so daß Γ_u Normalteiler in Γ von endlichem Index ist. V ist Γ_u-invariant und daher Urbild des Lochscheibenbündels V/Γ_u der zusammengesetzten Faktorisierung von (I) und (II). Wir zeigen, daß die Elemente von Γ V und allgemeiner alle V_C, $C \geq 0$, in sich überführen. Nach Lemma 6.1.1 ist Γ dann Gitter in N·U. Da V Urbild von V/Γ_u ist, reicht es aus zu zeigen, daß die Elemente $g \in G$ V/Γ_u in sich überführen. Dazu ist wiederum hinreichend, den Sachverhalt für eine offene dichte Teilmenge nachzuprüfen. $T = \mathbb{C}/\Lambda$ ist Bild eines offenen Fundamentalbereiches von Λ in $\mathbb{C}$, der den Nullpunkt enthält, und die Wirkung von g wird durch Multiplikation mit einer Einheitswurzel induziert. Da g auch in den Fasern als Multiplikation mit einer Einheitswurzel operiert und die Begrenzung der Lochscheiben von V_C/Γ_u durch (6o) gegeben ist, führt g in der Tat V_C/Γ_u in sich über. Damit ergeben sich auch die Teile (III), (IV) des Diagramms, und (X,x) ist die Kugelspitzensingularität $(\widehat{V/\Gamma}, \infty)$.

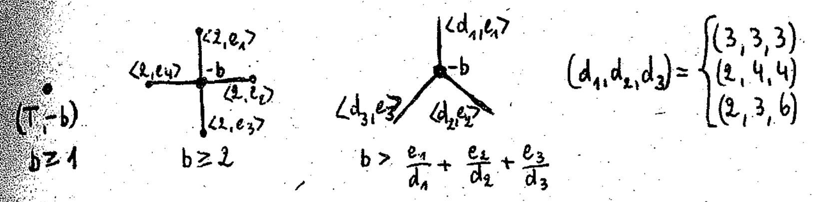
Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

6.5.1 <u>Satz</u>.
(X,x) sei normale komplexe Flächensingularität. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

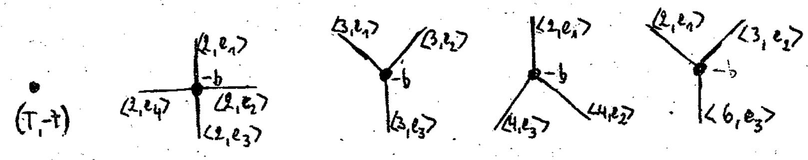
(i) (X,x) ist Kugelspitzensingularität.

(ii) (X,x) ist Quotient einer Toruslinienbündelsingularität längs einer Galoisüberlagerung $T \longrightarrow T/G$.

(iii) (X,x) hat einen (nicht notwendig minimalen) sternförmigen Auflösungsgraphen einer der folgenden Formen:



6.5.2 <u>Korollar</u>.
Ist $\Gamma \subset N\cdot U$ ein Gitter, $\Gamma_u = \Gamma \cap U$, $F = F(\Gamma)$, dann ist die Kugelspitzensingularität $(\widehat{V/\Gamma}, \infty)$ Quotient der Linienbündelsingularität von F/T längs $T \longrightarrow T/G$, wobei $T = \mathbb{C}/\Lambda$, $\Lambda = \Gamma_u/\Delta$, $G = \Gamma/\Gamma_u \cong \{id\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Der Auflösungsstern ist in dieser Reihenfolge



wobei t die (positive) Invariante der torsionsfreien nilpotenten Gruppe vom Rang 3 ist, die durch (6c) mit Hilfe eines ausgezeichneten Erzeugendensystems $\kappa = [0,q]$, $\beta = [b,r]$, $\gamma = [c,s]$ von Γ_u bestimmt ist. t kann durch den Flächeninhalt eines Fundamentalbereiches des Gitters Λ von $\mathbb{C}$ durch

$$t = 2|b,c|/q$$

berechnet werden. Die Selbstschnittzahlen -b der zentralen Kurven in den übrigen Auflösungssternen berechnen sich nach der Formel

$$b = t/|G| + \sum_i e_i/d_i$$

<u>**Beweis**</u>. Die Formeln für t und b ergeben sich aus (6e) bzw. (4e).

<u>aritäten für imaginärquadratisch de-</u>
<u>arithmetische Gruppen</u>

len wir zeigen, daß es nur endlich
uppen Γ_x gibt für $\underline{G}^{(d)}$-arithmetische
$\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d quadratfreie natürliche
öglichen Fälle genau bestimmen. Wir
oraus, weil für d = 1,2,3,7 mehr Mög-
d = 1 wurden die stationären Gruppen
n [42] exakt ermittelt und für d = 3
stehen noch aus.

Gruppe, $\Gamma \subset SU(\Phi, K)$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$
x. Dann ist γ Gl_3-konjugiert zu ei-
n Elemente
$\mathrm{diag}(1,i,-i)$, $\omega = e^{2\pi i/3}$, $i = \sqrt{-1}$
γ halbeinfach, also diagonalisierbar
Also sind die Eigenwerte Einheitswur-
egt, genügt jeder Eigenwert ζ von γ
iber K (charakteristisches Polynom).
; also höchstens 6. Es gilt, wenn n
lie Eulersche Funktion ist, $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = \varphi(n)$
1 nur primitive 3. bis 9. oder 12.
Vir schließen die Fälle 5 und 7 - 12
ırzel, n = 5,7,8,9,12. Die Galoisgrup-
h zur multiplikativen Restklassen-
.B. [31]), welche zyklisch ist, wenn

n Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Letzteres ist für n=5,7,9 der Fall. Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie existiert für diese n nur ein Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset M \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ vom Absolutgrad 2. Diese lassen sich angeben: $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ für n = 5, $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ für n = 7, $\mathbb{Q}(\omega)$ für n = 9. K ist nach unseren Voraussetzungen daher nicht Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta)$. Dasselbe gilt für n = 8,12. Hier ist die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ die Kleinsche Vierergruppe, und es gibt genau 3 Zwischenkörper vom Absolutgrad 2. Diese sind: $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ für n = 8 und $\mathbb{Q}(i), \mathbb{Q}(\omega), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ für n=12. Also haben wir stets $\mathbb{Q}(\zeta) \cap K = \mathbb{Q}$. Daraus und aus $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] \leq 6$ läßt sich $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] \leq 2$ und damit $\zeta = \pm 1, \pm i, (-\omega)^k$ ableiten. Aus $\det \gamma = 1$, $\mathrm{Tr}\,\gamma \in K \cap \mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}$ folgt nun leicht die Behauptung.

$SU(\Phi, K)$ wirkt effektiv auf B^2 ($d \neq 3$), weil der Ineffektivitätskern von $SU(\Phi, \mathbb{C})$ durch $\mathrm{diag}(\omega,\omega,\omega)$ erzeugt wird (siehe I.1.3). Also läßt sich Γ_x in $Gl(T_{B^2,x}) \cong Gl_2(\mathbb{C})$ einbetten. In diesem Sinne fassen wir Γ_x als Untergruppe von Gl_2 auf.

<u>7.2</u> Seien Γ, x wie in 7.1; für $G = \Gamma_x$, aufgefaßt als Untergruppe von Gl_2 gilt:

Jede zyklische Untergruppe (γ) von $G \subset Gl_2$ ist Untergruppe einer zyklischen Gruppe vom Typ $\langle 6,5\rangle, \langle 6,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,2\rangle$. (7a)
(Definition von $\langle d,e\rangle$ in 2.4)

<u>Beweis</u>. Da $SU(\Phi, \mathbb{C})$ transitiv auf B^2 wirkt (I.2), können wir $x = 0 \in B^2$ annehmen. Da der entsprechende Übergang von x zu 0 durch Konjugation der stationären Gruppe mit einem Element von $SU(\Phi, \mathbb{C})$ erfolgt, bleibt die Aussage von Lemma 7.1 erhalten. Wir haben also $G \subset SU(\Phi, \mathbb{C})_0 = S(U(2) \times U(1))$. Fassen wir

wieder G durch Wirkung auf den Tangentialraum $T_{B^2,0}$ als Untergruppe von $Gl_2(\mathbb{C})$ auf, was explizit durch die Zuordnung

$$\gamma \longmapsto \frac{1}{\zeta}A\ ,\quad \gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}\ ,\ A \in U(2),\ \zeta \in U(1),$$

$\det A \cdot \zeta = 1$ geschieht, so folgt aus Lemma 7.1 leicht die Behauptung.

7.3 Für $\Gamma_x = G \hookrightarrow Gl_2(\mathbb{C})$, Γ, x wie in 7.1, gilt:

$\gamma \in G$ ist Spiegelung $\Longleftrightarrow \gamma$ ist Gl_2-konjugiert zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

$\gamma \in G$ ist Symmetrie $\Longleftrightarrow \gamma = -id = diag(-1,-1)$;

$$G \cap Zl_2 \subseteq \{\pm id\}\ (Zl_2 \text{ Zentrum von } Gl_2) \qquad (7b)$$

Beweis. Symmetrien und Spiegelungen haben als Elemente von $SU(\Phi,\mathbb{C})$ nach Definition I.8.5 und Satz I.8.4 genau zwei Eigenwerte; diese müssen nach 7.1 ± 1 sein. Eine Symmetrie hat x als isolierten Fixpunkt, eine Spiegelung nicht. Durch Übergang zum Tangentialraum folgt die Behauptung (siehe Bemerkung 2.2).

Tabelle.

Die Tabelle auf der nächsten Seite gibt - wie gezeigt wird - alle Möglichkeiten für unsere Γ_x, Γ, x wie in 7.1, an. $G = \Gamma_x$ wird als Untergruppe von Gl_2 bis auf Gl_2-Konjugiertheit durch Angabe eines Erzeugendensystems beschrieben. Dieses steht in der dritten Spalte. Die erste Spalte bezeichnet die Gruppe , die durch die 3. Spalte definiert wird. Die Bezeichnungen rühren von klassischen endlichen Gruppen her wie im Beweisverlauf zu erkennen sein wird. Die 2. Spalte gibt die Ordnung der Gruppen an. In der 4. und 5. Spalte steht die Anzahl der Spiegelungen (immer $\neq id$ vorausgesetzt) bzw. der Symmetrien in G. Diese Spalten sind von Bedeutung, weil man die exakte Bestimmung der Γ-Konjuga-

G	|G|	Erzeugendensystem	Spiegel.	Symm.	G/S	Auflös.-graph	$\lvert e_x^{int}\rvert$	$\tilde{e}_x$
⟨2,2⟩	2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	0	{1}	• −1 (reg. Punkt)	0	0
⟨2,1⟩	2	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	0	1	⟨2,1⟩	• −2 rat. Doppelpunkt	1	3/2
⟨3,2⟩	3	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	0	0	⟨3,2⟩	−2 −2	2	8/3
⟨4,2⟩	4	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	1	0	⟨2,1⟩	• −2	2	3/2
⟨4,3⟩	4	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	0	1	⟨4,3⟩	−2 −2 −2	3	15/4
⟨6,2⟩	6	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	1	0	⟨3,1⟩	• −3 rat. Tripelpkt.	4	5/3
⟨6,5⟩	6	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	0	1	⟨6,5⟩	−2 −2 −2 −2 −2 rat. Doppelpkt.	5	35/6
$Z_2 \times Z_2$	4	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	1	{1}	• −1	1	1/4
$Z_2 \times Z_6$	12	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	2	1	⟨3,2⟩	−2 −2 rat. Doppelpkt.	9	11/4
$Q = 2D_2$	8	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	0	1	Q	−2 −2 −2 −2	7	39/8
$2D_3$	12	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	0	1	$2D_3$	−2 −2 −2 −2 −2	11	71/…
2T	24	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} j & j^3 \\ j & j \end{pmatrix}$ $(j = \sqrt{i})$	0	1	2T	−2 −2 −2 −2 −2 −2 rat. Doppelpkt.	13	167/2
D_3	6	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	3	0	{1}	• −1	2	1/3
D_4	8	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	4	1	{1}	• −1	3	3/8
D_6	12	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	6	1	{1}	• −1	5	5/12
G_{24}	24	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	~~12~~ 8	1	{1}	• −1	15	11/24

tionsklassen aller Γ_x, $x \in B^2$, durch das Auffinden der elliptischen Punkte in den Spiegelungsscheiben $Fix_{B^2}\sigma$, $\sigma \in \Gamma$ Spiegelung bzw. von Eigenvektoren in den Symmetrieebenen durchführen kann (Schwartzmann [42], Feustel [10]). S bezeichnet in der 6. Spalte die Untergruppe von G, die durch die Spiegelungen in G

$$\#\langle 6,2\rangle = \begin{cases} h(K) & d \equiv 1\ (3) \\ 0 & d \equiv -1\ (3) \\ h(K)/2 & d \equiv 0\ (3) \end{cases} \quad \text{Feustel}$$

kanon. Aufl.graph: D_3

erzeugt wird; G/S bestimmt den Typ der Singularität, den das Bild von x in B^2/Γ liefert. Wir werden zeigen, daß wir in der Tabelle genau die endlichen Untergruppen von Gl_2 erfassen, die der Bedingung (7a) genügen. Offen bleibt, ob alle diese Gruppen durch geeignete Γ_x realisiert werden können. Zunächst sieht man wegen der Diagonalisierbarkeit abelscher Gruppen sofort ein:

7.4 Die endlichen abelschen Gruppen $1 \neq G \subset Gl_2$ mit der Eigenschaft (7a) sind bis auf Gl_2-Konjugation genau die ersten 9 Gruppen der Tabelle.

7.5 $G \subset Gl_2$ sei endliche Gruppe mit der Eigenschaft (7a). Dann ist die Gruppenordnung $|G|$ ein Teiler von 24. Enthält G nicht die Symmetrie -id, so ist $|G|$ sogar Teiler von 12.

Beweis. Wir können ~~uns~~ nach 7.4 auf den nichtabelschen Fall beschränken. Für $g \in G$ bezeichne Z_g den Zentralisator von g in G. Es gilt

$$g \in G \setminus Zl_2 \Longrightarrow Z_g \text{ ist abelsch} \qquad (7c)$$

Dazu sei $\gamma \in Z_g$, d.h. $\gamma g = g\gamma$. g, γ erzeugen eine abelsche ~~erzeugen eine abelsche~~ Gruppe. Diese ist diagonalisierbar. Wenn a, b unabhängige Eigenvektoren von g sind, so sind es damit auch Eigenvektoren von γ. Damit haben alle Elemente von Z_g a, b als Eigenvektoren. Z_g ist damit abelsch.

Wir teilen nun G in Konjugationsklassen ein. Die Elemente der Konjugationsklasse von $g \in G$ stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen der Nebenklasse G/Z_g ($\gamma \bmod Z_g \longmapsto \gamma g \gamma^{-1}$). Daraus er gibt sich

$$|G| = \sum_{\text{conj } G} |G|/|Z_g|$$

wobei über die Menge conj G der Konjugationsklassen von G, genauer über ein Repräsentantensystem, summiert wird. Es folgt

$$1 = \sum_{\text{conj } G} 1/|Z_g| \qquad (7d)$$

$\{1\}, \{-1\}$ (falls $-1 \in G$) bilden jeweils eine Konjugationsklasse mit $Z_g = G$. Für die übrigen g gilt nach (7c) und 7.4 $|Z_g| \mid 12$. (7d) hat daher - falls -id in G liegt - die Gestalt

$$1 = 1/|G| + 1/|G| + m/12$$

bzw. im Falle $-id \notin G$

$$1 = 1/|G| + m/12 .$$

Im ersten Fall folgt $|G| \mid 24$ und im zweiten Fall $|G| \mid 12$.

Damit ist gezeigt, daß es nur endlich viele abstrakte Gruppen Γ_x gibt und daher auch nur endlich viele Darstellungen als Untergruppen von Gl_2. All diese wollen wir bestimmen. Wir beginnen mit den kleinen (d.h. spiegelungsfreien) nichtabelschen Gruppen $G \subset Gl_2$, die der Bedingung (7a) (und damit auch (7b)) genügen. Wir ziehen die Klassifikationsliste kleiner Gruppen in Brieskorns Arbeit [7] heran. Die kleinen nichtabelschen Gruppen sind eindeutig durch ihre abstrakte Gruppenstruktur bestimmt. Es gilt

7.6 Die nichtkommutativen kleinen Gruppen $G \subset Gl_2$, die der Bedingung (7a) genügen sind:

die Quaternionengruppe $Q = 2D_2$,
die binäre Diedergruppe $2D_3$,
die binäre Tetraedergruppe 2T.

Beweis. Die binären Gruppen wurden auf Seite 69 erklärt. In seinen Bezeichnungen läßt Brieskorn, [7], die 2 vor der binären

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d] & 2D_n \arrow[d] \\ Z_{4m} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong Z_{4m}/Z_{2m} \cong 2D_n/C_{2n} \end{tikzcd}$$

sind die Projektionen von $Zl_2 \times Sl_2$ auf Zl_2
|m liegt das Element j 8. Ordnung in Z_{4m}. Man
eines der Elemente (j,s), $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ oder id
$\psi(G') = G$ hat die Ordnung 8, was für unsere
st.

t $G' \subset Zl_2 \times Sl_2$ durch das Faserproduktdiagramm

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d] & 2T \arrow[d] \\ Z_{6m} \arrow[r] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong Z_{6m}/Z_{2m} \cong 2T/D_2 \end{tikzcd}$$

m liegt ξ der Ordnung 18 in Z_{6m}. Für $t \in 2T$
,t) in G'. Aber die Ordnung von $\xi \cdot t$ ist grö-
us $(\xi \cdot t)^n = 1$ $\det(\xi^n) = 1$ folgt, was nur für

q.e.d.

die nichtabelschen Gruppen $G \subset Gl_2$ mit (7a)
,12 ermitteln, die Spiegelungen enthalten.
dann nur noch die Gruppen der Ordnung 24 übrig,
gesondert behandelt werden.

endliche nichtkommutative Gruppe der Ordnung
er Eigenschaft (7a); G enthalte mindestens ei-
nn ist G eine Diedergruppe D_n, $n = 3,4,6$ mit
n Gl_2, die in der Tabelle angegeben ist.

<u>Beweis</u>. Der Weg besteht in der Angabe der möglichen abstrakten Gruppen und der anschließenden Untersuchung der (treuen) 2-dimensionalen Darstellungen. Wir verwenden die einfach zu beweisene Aussage:

G sei eine endliche Gruppe, $\iota : G \longrightarrow Gl_2$ ein injektiver Homomorphismus (treue Darstellung). Ist G nichtabelsch, so ist ι eine irreduzible Darstellung. (7e)

<u>$|G| = 6$</u>: Hier existiert nur eine abstrakte nichtabelsche Gruppe, nämlich die Diedergruppe des Dreiecks D_3. Diese hat nur eine irreduzible Darstellung vom Grad 2 (Serre [74], Kap.I, § 5.3), also nach (7e) höchstens eine treue Einbettung in Gl_2 und damit (siehe Tabelle) genau eine Einbettung.

<u>$|G| = 8$</u>: Es gibt genau 5 abstrakte Gruppen der Ordnung 8 (Hall [61], Kap. IV, § 4, Aufg. 6), darunter genau zwei nichtabelsche, nämlich Q und D_4. D_4 hat genau eine irreduzible Darstellung vom Grad 2 (Serre [74], I.5.3). Sei $Q \cong G \hookrightarrow Gl_2$, G enthalte eine Spiegelung der Ordnung 2. Das ist nicht möglich, da das einzige Element von Q 2. Ordnung auf diese Spiegelung s abgebildet werden müßte. s müßte dann wegen der Isomorphie von Q und G im Zentrum von G liegen, d.h. $Z_s = G$, was jedoch der Aussage (7c) widerspricht.

<u>$|G| = 12$</u>: Nach Hall [61] (IV.4, Aufg. 6) existieren genau 5 abstrakte Gruppen der Ordnung 12, darunter genau 3 nichtabelsche, nämlich $T = A_4$ (alternierende Gruppe), D_6 und $2D_3$.

A_4 scheidet aus, da keine irreduzible Darstellung vom Grade 2 existiert (Hall, [61], 16.10).

$2D_3$ kommt aus denselben Gründen wie bei Q nicht in Frage, da $2D_3$ nur ein Element der Ordnung 2 enthält und dieses im Zentrum liegt.

Für D_6 gibt es genau 2 irreduzible Darstellungen vom Grade 2 (Serre [74], I.5.3). Eine davon ist nicht treu: Sie ergibt sich aus $D_6 \twoheadrightarrow D_3 \hookrightarrow Gl_2$. Also bleibt nur die in der Tabelle angegebene Einbettung von D_6 übrig.

q.e.d.

Wir wenden uns nun den Gruppen der Ordnung 24 zu.

<u>7.8</u> Sei $G \subset Gl_2$ Gruppe der Ordnung 24, die der Bedingung (7a) genügt und die mindestens eine Spiegelung enthält. Dann gilt:

(i) G wird durch Spiegelungen erzeugt.

(ii) G enthält -1, und $G/\{\pm 1\} \cong D_6$.

<u>Beweis</u>. G enthält -1 nach 7.5. Aus (7a) folgt (7b) und daraus

$$G \cap Zl_2 = \{\pm 1\}.$$

Nach dem Beweis von 5.2 (i) wirkt $\overline{G} = G/\{\pm 1\}$ auf den Nullschnitt des Linienbündels $F' = \tilde{\mathbb{C}}^2/\{\pm 1\}$ effektiv, so daß $\overline{G}$ eine Galoisüberlagerung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1/\overline{G}$ induziert. Sind die d_i die Verzweigungsordnungen in den Verzweigungspunkten, so gilt nach der Hurwitzschen Geschlechtsformel (Seite 68) wegen $\overline{G} = |12|$

$$-2 = 12(-2 + \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)/d_i.$$

Man sieht leicht, daß $n = 3$ sein muß (beachte $d_i | 12$) und nur die Tripel

$$(d_1, d_2, d_3) = \begin{cases} (2,2,6) \\ (2,3,3) \end{cases}$$

in Frage kommen. Wir werden den 2. Fall durch folgende Aussage ausschließen:

$= Zl_2 \cap G$, $\overline{G} = G/Z$, $g \in G$, $\overline{g}$
s Linienbündel, auf das $\overline{G}$
t, $L \cong \mathbb{P}^1$ der Nullschnitt.
der Ordnung k für ein $z \in Z$ ge-
kt auf L Spiegelung der Ord-

ßt g eine Gerade in $\mathbb{C}^2$ punkt-
e Faser im Linienbündel $\widetilde{\mathbb{C}^2}$
er in $F = \widetilde{\mathbb{C}^2}/Z$ (vgl. Beweis
lso eine Spiegelung einer
kt der fixierten Faser mit L.
eise invariant, so bleibt die
ktorisierung $\widetilde{\mathbb{C}^2} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}^2}/Z$,
variant, wenn g irgendein Ur-
lle Abänderung von g um ein
ch einrichten, daß diese Faser
läßt ~~damit eine~~ Gerade in $\mathbb{C}^2$
it Spiegelung.
$\mathbb{C}^2/G$ ist vom Auflösungstyp

d_i)
r in Frage
1,1,3)
1,2,2)

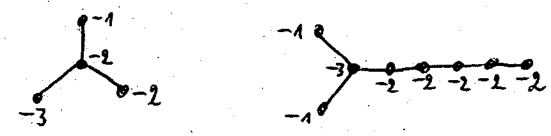
$\langle 3,3\rangle$ ist Spiegelung 3. Ordnung, so daß nach (7f) auch G eine Spiegelung der Ordnung ≥ 3 enthalten müßte, was nach 7.3 nicht möglich ist.

Im 2. Fall tritt keine Spiegelung auf, also nach (7f) auch nicht in G; G wäre dann kleine Gruppe, was der Voraussetzung widerspricht,

Für $(d_1,d_2,d_3) = (2,2,6)$ haben wir die einzig möglichen Fälle

$$(b;e_1,e_2,e_3) = \begin{cases}(2;1,1,5)\\(2;2,1,2)\\(3;2,2,5)\end{cases}$$

zu unterscheiden. Im 1. Fall tritt keine Spiegelung auf, was der Voraussetzung widerspricht. In den beiden übrigen Fällen haben wir die Auflösungssterne



die sich beide zu $\bullet$ -1 kontrahieren lassen. $\mathbb{C}^2/G$ ist also glatt, und nach dem Satz von Gottschling 2.3 wird G daher durch Spiegelungen erzeugt.

$\overline{G}$ ist eine nichtabelsche Gruppe (der Ordnung 12), da 3 Verzweigungspunkte vorliegen. Die Verzweigungsordnungen 2,2 und 6 lassen auf $\overline{G} = D_6$ schließen.

<u>7.9</u> $G \subset Gl_2$ habe die Eigenschaften (7a) und (i), (ii) von 7.8. Dann ist G bis auf Konjugation in Gl_2 die Gruppe G_{24}.

<u>Beweis</u>. $G = G_{24}$ ist abstrakt von folgendem Typ:

$\tilde{G} = (\tilde{g}, -1, \tilde{\sigma})$ mit den Relationen

$$\tilde{g}^6 = 1,\ (-1)^2 = 1,\ -1 \text{ zentral in } G,\ \tilde{\sigma}\tilde{g} = -\tilde{g}^{-1}\cdot\tilde{\sigma},\ \tilde{\sigma}^2 = 1 \qquad (7g)$$

Man setze dazu $\tilde{g} = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$, $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $-1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
$G_{24}/\{\pm 1\}$ ist die Diedergruppe D_6; denn sind g, σ die Bilder von $\tilde{g}, \tilde{\sigma}$ bei der Faktorisierung, so genügen sie den Relationen

$$g^6 = 1 \ \begin{pmatrix} g^3 \neq 1 \\ g^2 \neq 1 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = 1\ (\sigma \neq 1),\ \sigma g = g^{-1}\sigma \qquad (7h)$$

die D_6 charakterisieren.

$G \subset Gl_2$ haben nun die vorausgesetzten Eigenschaften, speziell haben wir die exakte Folge

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} D_6 \longrightarrow 1$$

Wir zeigen $G = (\tilde{g}, -1, \tilde{\sigma})$ für drei geeignete Erzeugende, die den Relationen (7g) genügen. Dazu seien g, σ Erzeugende von D_6 mit (7h). $\tilde{g}, \tilde{\sigma}$ seien Urbilder von g bzw. σ bzgl. φ. Wir können dabei o.B.d.A. $\tilde{\sigma}^2 = 1$ voraussetzen; G enthält nämlich nach Voraus - setzung mindestens zwei Spiegelungen. Eine davon muß auf eine Spiegelung von D_6 abgebildet werden, welche wir o.B.d.A. als σ annehmen können. Ferner gilt $\tilde{g}^6 = 1$, weil kein Element 12. Ordnung in G existiert. Weiterhin gilt

$$\tilde{\sigma}\tilde{g}\tilde{\sigma} = \pm\tilde{g}^{-1},$$

was aus (7h) folgt. Wir schließen das Vorzeichen + aus:
Wäre $\tilde{\sigma}\tilde{g}\tilde{\sigma} = \tilde{g}^{-1}$, so würde φ einen Isomorphismus der durch $\tilde{\sigma}, \tilde{g}$ erzeugten Untergruppe U auf D_6 vermitteln. D_6 hat aber nur eine treue Darstellung vom Grade 2, und diese enthält $-1 \in Gl_2$, während U -1 nicht enthält, was ein Widerspruch ist. Also sind die Relationen (6f) erfüllt, und G ist daher isomorph zu G_{24}.
$\{\pm g^k\}$ ist Untergruppe vom Typ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ und muß daher (siehe

Tabelle) bis auf Gl_2-Konjugation durch $\left(\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ dargestellt werden. Aus $\tilde{\sigma}\tilde{g}\tilde{\sigma} = -\tilde{g}^{-1}$ folgt leicht, daß für $\tilde{\sigma}$ dann nur die Möglichkeit $\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $\eta \in \mathbb{C}^*$, bleibt, o.B.d.A. (Gl_2-Konjugation) $\eta = 1$, also $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

q.e.d.

Zusammenfassend ergibt sich:

<u>Theorem 7</u>. Sei $\Gamma \subset SU(\Phi, K)$ $\underline{G}^{(d)}$-arithmetische Gruppe, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, d quadratfreie natürliche Zahl, $d \neq 1,2,3,7$, $x \in B^2$, $\Gamma_x \neq \{id\}$. Dann ist Γ_x durch die Wirkung auf den Tangentialraum $T_{B^2 x}$ aufgefaßt als Untergruppe von Gl_2 bis auf Gl_2-Konjugiertheit eine der Gruppen, die in der Tabelle auf Seite 95 aufgeführt sind.

7.10 <u>Bemerkung</u>. In $\Gamma = \underline{G}^{(d)}_{\mathbb{Z}}$, d = 2,7 existieren stationäre Gruppen $\Gamma_x \neq \{id\}$, die nicht in der Tabelle auf Seite 95 erfaßt werden.

Wir geben einen Existenzbeweis für ein Element 8. Ordnung (d = 2) bzw. für ein Element 7. Ordnung (d = 7) in Γ. Für d = 3 gelang die explizite Konstruktion eines Elementes 9. Ordnung in $U(\Phi, \mathbb{Z}[\omega])$, die in [10] aufgeschrieben wurde. Wahrscheinlich könnte man im Falle d = 2,7 ähnlich verfahren. Wir gehen jedoch anders vor und setzen tiefer liegende Ergebnisse der Zahlentheorie ein. Zunächst führen wir das Problem mit Hilfe des starken Approximationssatzes auf ein lokales zurück, dazu folgende

7.11 <u>Definition</u>. Sei $\underline{G}$ algebraische Gruppe, definiert über $\mathbb{Q}$, $\underline{G}_{\mathbb{A}}$ die Adèlegruppe. $\underline{G}$ hat die absolut starke Approximationseigenschaft, wenn $\overline{\underline{G}_{\mathbb{R}} \cdot \underline{G}_{\mathbb{Q}}} = \underline{G}_{\mathbb{A}}$.

Hierbei ist der topologische Abschluß in der lokal kompakten ch als äquivalente

ganzen Primzahlen,
Dann existiert ein

...,n

olut starke Approxi-

ra [76]. 7.12 folgt
atonov [77]

$G = \underline{G}_{\mathbb{R}}$ einfach
. Dann hat $\underline{G}$ die

einfach, einfach
elgason [19]).
en Lemmas für meh-
en (für eine Glei-
§ 2) kann man zei-
(ϕ, $\mathcal{O}/\mathcal{O}_p$) mit
oder $p \neq 2$ nicht

r Fundamentalbe-

reiche gebraucht und der Beweis an der entsprechenden Stelle geführt.

Sei $d = 7$ und $p = 2$, $\eta = (1 + \sqrt{-7})/2$

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \bar{\eta} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert ein Element in $SU(\phi, \mathcal{O}/2\mathcal{O})$. Nach 7.14 existiert ein Element γ_2 in $\underline{G}_{\mathbb{Z}_2}$, dessen Reduktion modulo 2 $\bar{\gamma}$ ist. Nach dem starken Approximationssatz 7.12 (7.11') existiert ein $\gamma \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}$ mit $\gamma \equiv \gamma_2$ mod 2 und $\gamma \in \underline{G}_{\mathbb{Z}_p}$ für $p \neq 2$. Daraus folgt $\gamma \in \underline{G}_{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{Tr}\,\gamma \equiv \eta$ mod $2\mathcal{O}$, also $\mathrm{Tr}\,\gamma \notin \mathbb{Z}$. Nach I.8.7 hat γ endliche Ordnung. Die Spuren von Elementen 1.,2.,3.,4.,6.,Ordnung liegen hingegen in $\mathbb{Z}$. Nach dem Beweis von 7.1 ist damit die Existenz eines Elementes 7. Ordnung nachgewiesen.

Analog zeigt man die Existenz eines Elementes 8.Ordnung in $\underline{G}^{(2)}_{\mathbb{Z}}$, indem man setzt: $d = 2$, $p = 3$, $\eta = 1 + \sqrt{-2}$,

$$\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} -\bar{\eta} & 1 & 0 \\ 1 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Literatur (Kapitel I)

[1] Armstrong, P., The fundamental group of the orbit space of a discontinous group, Proc. Cambridge Philos. Soc., 64, N2, (1968), 299-301

[2] Feustel, J.M., Über die Spitzen von Modulflächen zur zweidimensionalen komplexen Einheitskugel, Ak.d.Wiss.d.DDR, ZIMM, (1977)

[3] Borel, A., Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology, 2, (1963), 111-122

[4] Borel, A. Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, Paris, (1969)

[5] Borel, A., Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic Lie groups, Annals of Math., 75, (1962), 485-535

[6] Borel, A., Tits, J., Groupes rèductives, Publ. math. I.H.E.S. 27, (1965), 55-150

[7] Brieskorn, E., Rationale Singularitäten komplexer Flächen, Inv. math., 4, (1967), 336-358

[8] Chevalley, C., Invariants of finite groups generated by reflections, Am. Journ. Math., 77, (1955), 778-782

[9] Cohn, L., The dimension of spaces of automorphic forms on a certain two-dimensional complex domain, Mem. Am. Math. Soc., 158 (1975), 96pp.

[10] Feustel, J.M., Kompaktifizierung und Singularitäten des Faktorraumes einer arithmetischen Gruppe, die in der zweidimensionalen Einheitskugel wirkt, Diplomarbeit, Humboldt-Universität Berlin, (1976)

[11] Freitag, E., Über die Struktur der Funktionenkörper zu hyperabelschen Gruppen I, Journ. f.d. reine und angew. Math., 247, (1971), 97-117

[12] Freitag, E., Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppe, Inv. math., 17, (1972), 106-134

[13] vander Geer, G., On Hilbert modular surfaces of principal congruence subgroups, Dissertation, Rijksuniversiteit te Leiden, (1977)

[14] Godement, R., Domaines fodamentaux des groupes arithmétiques, Sem. Bourbaki, exp. 257, Paris, (1962/63)

[15] Gottschling, E., Reflections in bounded symmetric domains, Communication pure and appl. Math., 12, (1969), 693-714

[16] Griffiths, P.A., Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties, Annals of Math., 94, (1971), 21-51

[17] Hammond, W.F., The Hilbert modular surface of a real quadratic field, Math. Ann., 200, (1973), 25-45

[18] Hammond, W.F., Chern numbers of 2-dimensional Satake compactifications, preprint, State University of New York at Albany, (1976)

[19] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces, Academic press, New York and London, (1962)

[20] Hemperly, J.C., The parabolic contribution to the number of linearly independent automorphic forms on a certain bounded domain, Am. Journ. Math., 94, (1972), 1078-1100

[22] Hirzebruch, F., Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch, Symp. Intern. Top. Alg., Univ. de Mexico, (1958), 129-144

[21] Hilton, P.J., Wylie, S., Homology theory, Univ. Press, (1960)

[23] Hirzebruch, F., Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten, Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, Westdeutscher Verlag, (1966), 583-608

[24] Hirzebruch, F., Hilbert modular surfaces, L'Ens. Math., <u>19</u>, (1973), 183-281

[25] Hirzebruch, F., van de Ven, A., Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces, Inv. math., <u>23</u>, (1974), 1-29

[26] Hirzebruch, F., Zagier, D., Classification of Hilbert modular surfaces, in Complex Analysis and Algebraic Geometrie, Iwanami Shoten and Cambridge Univ. Press, (1977)

[27] Holzer, L., Zahlentheorie I, Teubner, Leipzig, (1958)

[28] Kaneuki S., Nagano T., Quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces, Osaka Math. Journ., <u>14</u>, (1962), 241-252

[29] Kassels, J.W.S., Fröhlich, A., Algebraic number theory, Academic Press, London and New York, (1967)

[30] Kazdan, D.A., Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups, Funct. Anal. Appl., <u>1</u>, (1967), 63-65

[31] Lang, S., Algebraic numbers, New York, (1964)

[32] Langlands, R.P., The dimension of spaces of holomorphic forms, Amer. Journ. Math., <u>85</u>, (1963), 99-125

[33] Matsumoto, H., Subgroups of finite index in certain arithmetic groups, Proc. Symp. pure Math., <u>9</u>, Am. Math. Soc., (1966)

[34] Matsushima, Y., On the first Betti number of compact quotient spaces of higher dimensional symmetric spaces, Ann. Math., <u>75</u>, (1962), 312-330

[35] Matsushima, Y., On Betti numbers of locally symmetric Riemannian manifolds, Osaka Math. Journ., <u>14</u>, (1962), 1-20

[36] Miyaoka, Y., On the Chern numbers of surfaces of general type, Inv. math., <u>42</u>, (1977), 225-237

[37] Mumford, D., The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. I.H.E.S., <u>9</u>, (1961), 229-246

[38] Picard, E., Sur des fonctions de deux variables independantes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math., <u>2</u>, (1883), 114-135

[39] Pjatezkij-Shapiro, I.I., Geometrie klassischer Gebiete und die Theorie der automorphen Formen, Moskau, (1961), (russ.)

[40] Prill, D., Local classification of quotients of complex manifolds by discontinous groups, Duke Math. Journ., <u>34</u>, (1967), 375-386

[41] Raghunathan, M., Discrete subgroups of Lie groups, Springer, (1972)

[42] Schwartzmann, O.W., Über den Faktorraum einer arithmetischen diskreten Gruppe, die in der komplexen Kugel wirkt, Dissertation, Moskau, MGU, (1974), (russ.)

[43] Schwartzmann, O.W., Über diskrete Gruppen mit einfach zusammenhängendem singularitätenfreiem Faktorraum, Usp. Math. Nauk, <u>28</u>, 2 (169), (1974), S. 236, (russ.)

Schwartzmann, O.W., Über den Faktorraum einer der einfachsten arithmetischen Gruppen in der komplexen Kugel, Usp. Math. Nauk, 28, 4(169), (1974), 202-203, (russ.)

Serre, J.-P., Abelian l-adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, Amsterdam, (1968)

Shimura, G., On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka Journ. Math., 1, No. 1, (1964), 1-14

Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten, Publ., Princ. Univ. Press, (1971)

Siegel, C.L., Automorphe Funktionen in mehreren Variablen, Göttingen, (1954/55)

Spanier, E.H., Algebraic Topology, New York, (1966)

van de Ven, A., On the Chern numbers of surfaces of general type, Inv. math., 36, (1976), 285-293

Wagreich, P., Singularities of complex surfaces with solvable local fundamental groups, Topology, 11, (1972), 51- 72

Wang, S.P., The dual space of semisimple Lie groups, Am. Journ. Math., 91, (1969), 921-937

Zappa, G., Sopra una probabile diseguaglinca tra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica, Rend. Mat. e Appl., 14, (1955), 455-464

Literatur (Ergänzung für Kap. II)

[54] Bourbaki, N., Groupes et algèbres de Lie, Hermann, Paris, (1968)

[55] Cartan, H., Prolongement des espaces analytiques normaux, Math. Ann., 136, (1958), 97-110

[56] Cartan, H., Quotient d'un espace analytique par un group d'automorphismes, in Algebraic geometry and topology, Princeton University Press, (1957), 90-102

[57] Cartan, H., Sur les fonctions des plusieurs variables complexes, l'iteration des transformations intérieurs d'un domain borné, Math. Z., 35, (1932), 760-773

[58] Fujiki, A., On resolutions of cyclic quotient singularities, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 10, (1974), 293-328

[59] Gottschling, E., Die Uniformisierbarkeit der Fixpunkte eigentlich diskontinuierlicher Gruppen von biholomorphen Abbildungen, Math. Ann., 169, (1967), 26-54

[60] Grauert, H., Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., 146, (1962), 331-368

[61] Hall, M., The theory of groups, New York, (1959)

[62] Hilton, P.J., Wylie, S., Homology theory, Univ. Press, (1960)

[63] Hirzebruch, F., Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Math. Ann., 126, (1953), 1-22

[64] Karras, U., Klassifikation 2-dimensionaler Singularitäten mit auflösbaren lokalen Fundamentalgruppen, Math. Ann., 213, (1975), 231-255

INHALTSVERZEICHNIS