Notebook-Reise ins Mathe-Land: Von Babylon über Pythagoras zu Fermat, Euler, Gauß, Jacobi, Dedekind bis in's digitale Zeitalter

R.-P. Holzapfel[0]

Contents

1 **Vorwort** 2

2 **Mittelwert-Erzeugung der Tontafel Plimpton 322** 3

3 **Vergleich mit der babylonischen Tontafel** 4

4 **Sonnenkalender - eine mögliche (antike) Anwendung** 5

5 **Quadratsummen-Methode und Winkel-Vollständigkeit** 6

6 **Pythagoräische Reihen zur Erfassung primitiver Dreiecke** 8

7 **Approximation von Quadratwurzeln** 10

8 **Jacobis Theta-Reihe und der Zwei-Quadrate-Satz** 11

9 **Der Drei-Quadrate-Satz und die dreidimensionale Notebook-Version der Tontafel** 13

10 **Aktueller Ausblick: Eingreifen von Heckes Modulreihen in die nichteuklidische Kugel-Geometrie** 15

11 **Nachwort: Zur Beamer/Whiteboard-Präsentation des BMG-Vortrages** 16

[0]Der Autor bedankt sich bei Dr. H. Pieper für die Nutzungserlaubnis seines Text- und Bildmaterials in [Pi].

1 Vorwort

Unternehmen wir eine virtuelle Zeitreise bis zurück ins antike Babylon. Ein Notebook mit modernem Arithmetik-, Analysis-, und Geometrie-Programm nebst Visualisierungen nehmen wir mit. Es lohnt sich, denn die Mathe-Tontafeln der Babylonier offenbaren uns dadurch spielend deren Lösungen. Sie ermöglichen es uns, anlehnende Fragestellungen, deren Beantwortung damals außer Reichweite lagen, zu beantworten. Ausgangspunkt ist die Keilschrift-Tontafel Plimpton 322, die heute in der Columbia-Universität New York aufbewahrt wird ([Bild 1])[0]. Sie wurde schon des öfteren in der Neuzeit Gegenstand mathematischer Überlegungen, insbesondere im 20. Jahrhundert. Es handelt sich um eine Tabelle von 15 Winkeln zwischen 45 und 60 mit ungefähren Grad-Abständen. Man entnimmt ihr zwei Tontafel-Spalten mit ganzzahligen Seiten rechtwinkliger Dreiecke, die leicht konstruiert werden können und besagte Winkel enthalten. Wurde bisher auf griechische Kenntnisse zu antik-numerischer Rekonstruktion der Tafel zurückgegriffen, so zeigt sich nun, dass dies nicht unbedingt nötig ist. Der Gebrauch von Mittelwerten - arithmetischen und geometrischen - reicht völlig aus. In ihnen steckt bereits geburtshelfend die Pythagoras-Relation als Vorläufer des berühmten Lehrsatzes, Mit der Mittelwert-Methode wird die numerische Aufstellung der Tabelle - die immerhin Zahlen bis nahe 20000 enthält - überraschend leicht nachvollziehbar, sogar mit Papier und Bleistift. Mit dem Notebook wird man - anders als mit einem Großrechner (brute force) - gezwungen, einen einfachen Weg zu den Resultaten zu finden. Damit kommt man spielend den ursprünglichen mathematischen Ideen nahe, die oftmals später infolge zeitsparender eleganter Modernisierungs- Schritte verschüttet wurden.

Spielerisch wird auch klar, dass die Babylonier sogar die **vollständige** Winkel-Tabelle hatten, wenn man die Kathetenlängen auf 15000 beschränkt und die Werte der antiken Winkelfunktion des "reziproken Sinus" exakt in Keilschrift ausdrücken kann. Diese Winkelvollständigkeits-Aussage habe ich nirgendwo gefunden. Sie wird mitsamt transparentem (Notebook-) Beweis hier nachgereicht. Auch vermisste ich einen Hinweis darauf, dass die Tafel Schattennlängen des Einheitsstabes zwischen 45 und 58 Grad vollständig (im babylonischen 60-er Zahlensystem) enthält, was sich als Sonnenkalender verwenden lässt.

Wieviele pythagoräische Dreiecke (rechtwinklige mit ganzzahligen Seiten) gibt es eigentlich, wenn man unser heutiges (rationales) Zahlensystem zugrunde legt ? Wir suchen eine digitale Fortsetzung der Babylon-Tafel mit unserem Notebook. Wir werden zunächst die primitiven pythagoräischen Dreiecke zählen, deren Hypothenuse - wie bei der Tontafel - unterhalb 20000 liegt. Dazu ist ein Sprung in die Neuzeit zu Gauß erforderlich. Gewiss haben die pythagoräischen Dreiecke bei seiner Schöpfung der komplexen Gaußschen Zahlen und deren Untersuchung zahlentheoretischer Eigenschaften eine Rolle gespielt. Die Primzerlegung im Gaußschen Zahlbereich liefert uns dann nicht nur Anzahlbestimmungen, sondern auch die Aufzählung der pythagoräischern Tripel. Diese können unmittelbar von den Exponenten einer Reihe abgelesen werden, die ich

[0] [Pi], auch Google: Tontafel Plimpton 322

pythagoräisch nennen werde.

Mit (weiterer) Hilfe einer Jacobischen Thetareihen können wir dann sogar die rechtwinkligen Dreiecke mit gannzahligen Katheten (und Wurzel-Hypothenuse) ermitteln. Dazu werden pythagoräische Wurzel-Reihen aus einer klassischen Theta-Reihe "herausgewaschen". Wie von einer Wäscheleine lassen sich dann die pythagoräischen Dreieckstripel von der Reihe pflücken, abschnittsweise, unmittelbar, explizit (und für immer).

Den Anstoß zu den Wurzeln kommt auch von den Babyloniern. Sie berechneten $\sqrt{2}$ bis auf ein Millionstel genau. Man muss zum arithmetischen Mittel nur noch das harmonische Mittel hinzunehmen, um schnell Wurzeln von natürlichen Zahlen approximieren zu können. Auch dieser Weg wird hier praktisch beschrieben. Wir können dabei bereits explizit die Geburtswehen des Dedekindschen Schnittes erleben und finden somit auch kreativen Zugang zu den Ideen des modernen Aufbaus der Mathematik-Grundlagen im 19. Jahrhundert.

Der Vorstoß ins Dreidimensionale führt dann direkt in die aktuelle Erforschung quasiperiodischer Funktionen auf nichteuklidischen Kugeln negativer konstanter Krümmung.

2 Mittelwert-Erzeugung der Tontafel Plimpton 322

Für zwei Zahlen $0 < u < v$ definiert man das geometrische und das arithmetische Mittel wie folgt:

$$h = h(u,v) = \sqrt{uv} \quad , \quad d = d(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

Letzteres lässt sich problemlos auf negative Zahlen fortsetzen:

$$b = b(u,v) = \frac{v-u}{2}.$$

Wie man leicht sieht, ist die Pythagoras-Relation

$$b^2 + h^2 = d^2$$

erfüllt, so dass wir b, h als Katheten und d als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks interpretieren können. Wir sprechen von pythagoräischen Zahlentripeln bzw. Dreiecken. Um geometrische Ähnlichkeiten auszuschließen, beschränken wir uns nur auf primitive (d.h. teilerfremde) Tripel (b, h, d). Wir erzeugen sie durch primitive ungerade Paare (u, v) oder gerade Paare mit primitiver Halbierung. Alle anderen u, v generieren imprimitive Tripel. Lässt man nur gerade u, v mit kleinen Primteilern $2, 3, 5$ zu , nur Katheten < 15000 und Dreieckswinkel zwischen 45 und 58 Grad zu, so erhält man folgende Tabelle:

Winkel	u	v	b	**h**	**d**	**Nr**
45.2°	$2 \cdot 5^2$	$2^5 \cdot 3^2$	119	**120**	**169**	**1**
45.7°	$2 \cdot 3^6$	$2^1 3$	3367	**3456**	**4825**	**2**
46.2°	2^{11}	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$	4601	**4800**	**6649**	**3**
46.7°	$2^3 \cdot 3^6$	$2 \cdot 5^6$	12709	**13500**	**18541**	**4**
47.9°	2^5	$2 \cdot 3^4$	65	**72**	**97**	**5**
48.4°	$2 \cdot 3^4$	$2^5 \cdot 5^2$	319	**360**	**481**	**6**
49.7°	$2 \cdot 5^4$	$2^3 \cdot 3^6$	2291	**2700**	**3541**	**7**
50.2°	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	2^{11}	799	**960**	**1249**	**8**
51.3°	$2^5 \cdot 3^2$	$2 \cdot 5^4$	481	**600**	**769**	**9**
52.6°	$2^7 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^8$	4961	**6480**	**8161**	**10**
53.1°	2	2^3	3	4	5	**11**
55.0°	$2 \cdot 5^4$	$2^9 \cdot 3^2$	1679	**2400**	**2929**	**12**
56.2°	2^7	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	161	**240**	**289**	**13**
56.8°	$2 \cdot 3^6$	$2^3 \cdot 5^4$	1771	**2700**	**3229**	**14**
58.1°	$2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^4$	56	**90**	**106**	**15**

Damit haben wir schon im wesentlichen die babylonische Tontafel Plimpton 322 [Bild 1] generiert, was wir sogleich genauer erörtern werden. Ohne Zweifel waren die Babylonier in der Lage, die generierenden Paare aufzulisten und die Mittelwert-Rechnungen auszuführen.

3 Vergleich mit der babylonischen Tontafel

Die Keilschrift-Tontafel Plimpton 322 enthält die letzten drei (fett gedruckten) Spalten der obigen Tabelle. Die **d**-Spalte der Hypothenusen wird dort mit "Diagonale" überschrieben und die **h**-Spalte mit "Höhe". Es ist naheliegend, dass die Begriffe - auch die "Breite" b - der Betrachtung eines rechteckigen Tores entlehnt ist. Längs der letzten Zeile ist die Tontafel augenscheinlich weggebrochen. Das Fehlen einer weiteren Zeile (58.7°, Nr.16, siehe unten) ist (auch) dadurch erklärbar.

Statt des Gradmaßes für Winkel erscheint in der ersten Spalte der Tontafel die Winkelfunktion des reziproken Sinus, genauer dessen Quadrates. Daraus resultiert die Anordnung/Numerierung der Zeilen in der Tontafel nach absteigenden sin^{-2}-Werten d^2/h^2, d.h. nach ansteigenden Winkeln.

Um diese Quotienten im babylonischen Hexagesimal-System exakt - nämlich als endliche Summe ganzzahliger 60er-Potenzen - schreiben zu können, muss verlangt werden, dass die Höhe h nur die Primteiler $2, 3, 5$ hat. Dazu müssen die generierenden Zahlen u, v diese Eigenschaft haben. Solche Zahlen werden (bzgl. dieses Sechzigersystems) *regulär* genannt.

Das Paar (h, d) der Nr. 11 wird auf der Tontafel imprimitiv angeben, nämlich als $(h, d) = (60, 75)$. Das hat einen einfachen praktischen Grund, der auf die Längenmessung zurückzuführen ist. Bekannt ist ein babylonischer Messstab, der die stark vergrößerte Form eines Schreibergriffels hat. Mit Hilfe dieser - in 30

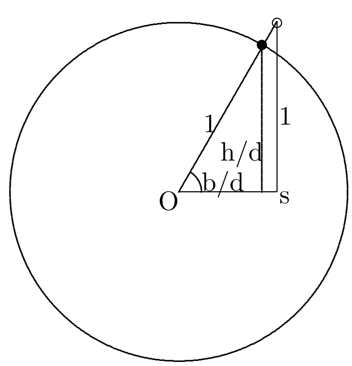
Teile (Fingerbreiten) durch Kerben unterteilten (nach dem Fundort benannten) "Nippur-Elle"[0] - lässt sich nun leicht der Winkel im Dreieck Nr.11 legen, indem einfach zwei dieser Stäbe senkrecht in die Höhe gereckt werden, am Ende eine Schnur der Länge von $2\frac{1}{2}$ Stäben befestigt und sie glatt zum Boden gezogen wird. Dort bildet sich dann der Winkel von etwa 53°. Auf diese Weise lassen sich übrigens alle Winkel der Tabelle mit passenden Stäben und/oder Seilen legen.

Hätten die Babylonier Hypothenusen-orientiert gesucht, sagen wir bis $d = 20000$, so hätten sie neben Nr. 16: $(b, h, d) = (175, 288, 337)$ mit Winkel 58.7°, noch ein primitives pythagoräisches Tripel mehr gefunden, nämlich $(b, h, d) = (11529, 16000, 19721)$, das als Nr.11a in der Literatur erscheint, siehe [A]. Es hätte mit dem Winkel von ca. 54° ausgezeichnet nach der Nr.11 in die Tabelle gepasst. Die Rechengeduld war wohl bei Katheten bis 15000 im Altertum erschöpft.

4 Sonnenkalender - eine mögliche (antike) Anwendung

Auf den ersten Blick ist unklar, warum nicht einfach nur die Quotienten d/h in der Tontafel auftauchen, anstelle der Quadrate. Allerdings ist eine vertikale Bruchlinie der Tontafel zu erkennen, so dass durchaus die Möglichkeit der Existenz einer ursprünglichen d/h-Spalte besteht. Es gibt aber auch einen praktischen Vorteil der Quadratspalte. Wenn ich genau wissen will, in welchem Zeitabschnitt des Jahres ich mich befinde, dann messe ich einfach die Schattenlänge s eines Einheitsstabes zur Mittagszeit. Nach dem Strahlensatz (siehe ähnliches Dreieckspaar mit markiertem Winkel in der Figur), entnehme ich s dem Seitenverhältnis $\frac{b}{h}$. Um s^2 - und damit auch die Schattenlänge s - zu gewinnen, braucht man in der Plimpton-Tafel nur die 1 vor dem Komma in der $\frac{d^2}{h^2}$-Spalte wegzulassen. Dann hat man wieder eine Quadratzahl, und was für eine ! Nämlich das Quadrat der Schattenlänge s des Einheitsstabes beim zugehörigen Strahlungswinkel der Sonne:

$$\frac{d^2}{h^2} - 1 = \frac{d^2 - h^2}{h^2} = \frac{b^2}{h^2} = s^2.$$



[0] Die Interpretation als Sonnenschatten-Tabelle habe ich, obwohl sie doch naheliegend ist, in der Literatur nirgends gefunden. Vielleicht habe ich nicht lange genug gesucht. Ein kurzer Überschlag zeigt, daß die Sonnenwinkel in Babylon im Jahr zwischen 36° und 83° pendeln. Die Fortsetzungs-Tabelle von 60° bis 83° sähe dann so aus (mit Schattenlängen s):

Winkel	s	u	v	Breite	Höhe	Diag	No.
61.2°	0.37	2^9	$2 \cdot 3^6$	473	864	985	17
61.7°	0.36	3^2	5^2	8	15	17	18
63.5°	0.35	$2^3 5^4$	$2 \cdot 3^8$	4061	8100	9061	19
64.1°	0.33	$2 \cdot 5^2$	2^7	39	80	89	20
65.3°	0.32	2^9	$2 \cdot 5^4$	369	800	881	21
67.5°	0.29	2^3	$2 \cdot 3^2$	5	12	13	22
68.0°	0.28	$2 \cdot 3^6$	$2^7 5^2$	871	2160	2329	23
69.3°	0.26	$2 \cdot 5^4$	$2^5 3^4$	671	1800	1921	24
70.4°	0.25	$2 \cdot 3^4 5^2$	2^{13}	2071	5760	6121	25
70.9°	0.24	2^{11}	$2 \cdot 3^4 5^2$	1001	2880	3049	26
71.6°	0.23	$2^3 3^4$	$2 \cdot 5^4$	301	900	949	27
73.3°	0.21	$2^5 5^2$	$2 \cdot 3^6$	329	1080	1129	28
73.8°	0.20	$2 \cdot 3^2$	2^5	7	24	25	29
76.1°	0.18	$2 \cdot 5^4$	2^{11}	399	1600	1649	30
77.2°	0.16	2^5	$2 \cdot 5^2$	9	40	41	31
79.6°	0.13	$2 \cdot 5^2$	$2^3 3^2$	11	60	61	32
80.1°	0.12	$2 \cdot 3^6$	2^{11}	295	1728	1753	33
83.0°	0.08	2^7	$2 \cdot 3^4$	17	144	145	34

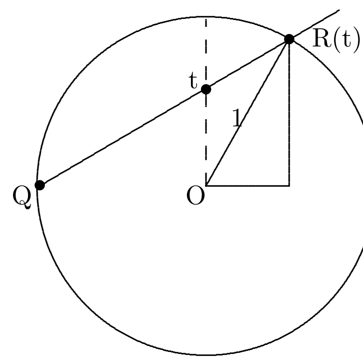
Man findet diese Fortsetzung in der Quadratsummen-Version in [A]. Zur Übertragung in die unsere lineare Mittelwert-Version braucht man nur die regulären Höhenquadrate in zulässige Faktorenpare u, v zu zerlegen.

5 Quadratsummen-Methode und Winkel-Vollständigkeit

Die alten Griechen wussten bereits wie man alle rationalen pythagoräischen Tripel konstruiert. Wir beschreiben zunächst, wie man geometrisch darauf kommt. Es wird einfach die ebene Version der stereographischen Projektion angewandt: Von einem Punkt Q des Einheitskreises, man verwendet bequemerweise $Q = (-1, 0)$, werden die Punkte $(0, t)$ der y-Achse auf $R = R(t)$ der Einheitskreislinie projiziert. Der Parameter t ist dann die Steigung der projizierenden Geraden $y = t(x + 1)$ durch Q und R, siehe Figur. Damit erhält man die Parametrisierung der offenen Kreisperipherie (ohne Q):

$$R(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

[0]Google: Nippur-Elle, Wikipedia



Setzen wir $t = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{N}_+$, so erhalten wir Brüche homogener quadratischer Funktionen, in den Variablen p,q:

$$x(p,q) = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}, \quad y(p,q) = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

In projektiven Koordinaten läßt sich daher jeder rationale Kreispunkt im 1. Quadranten in der Form $(p^2 - q^2 : 2pq : p^2 + q^2)$ schreiben mit pythagoräischem Zahlentripel $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$. Wir dürfen ohne Punktverlust annehmen, dass p und q teilerfremd sind. Ist p oder q gerade, so ist das Tripel primitiv, andernfalls muss man es noch durch 2 teilen. Es ist nun klar, dass es für jedes pythagoräische Dreieck/Tripel ein primitives natürliches Zahlenpaar (p, q) geben muss. Da die Höhen h und Diagonalen d in (jeder Zeile) der Tontafel Plimpton 322 gegeben sind, kann man aus $(h, d) = (2pq, p^2 + q^2)$ spielend leicht mit Hilfe des Mathe-Notebooks das Ursprungspaar (p, q) berechnen. Als Beispiel stellen wir Nr. 4 der Tontafel von Quadratsumme auf Mittelwerte um[1].

Auf die Mittelwert-Methode zurückblickend sei abschließend bemerkt, dass man selbige unter Vermeidung der Mittelwert-Begriffe auch als Quadratdifferenz-Methode bezeichnen kann. Man geht von dem Quadrat einer regulären Höhe h aus und zerlegt es in zwei Faktoren:

$$h = u \cdot v = (d + b) \cdot (d - b)$$

so oft es geht. Implizit stecken darin die Mittelwerte

$$h = \sqrt{uv},\ d = \frac{u + v}{2},\ b = \frac{u - v}{2}.$$

Diesen Weg sind wir im ersten Abschnitt gegangen. Mit größter Wahrscheinlichkeit haben ihn auch die Babylonier beschritten. Damit waren sie sich wohl

[1]

$with(SolveTools) : PolynomialSystem(2 \cdot p \cdot q = 13500, p^2 + q^2 = 18541],\ [p, q])[2];$

Output: $p = 125,\ q = 54.$

auch der (regulären) Winkel-Vollständigkeit ihrer Tafel bewusst. Ein paar Zeichen in den Sand mit einem Stock reichten zur Aufstellung mit Hilfe der Mittelwert-Methode aus. Die Quadratsummen-Methode ist wohl eine spätere Erfindung, deren Aufwand zum Vollständigkeits- Nachweis für die Antike unzumutbar wäre. Mit dem Notebook ist letztere Methode aber kein Problem. Sie ist sogar beim Auffinden aller (auch nicht regulärer) Tripel recht praktikabel, da man mit der (Notebook-)Arithmetik der Gaußschen Zahlen arbeiten kann. Wir halten abschließend fest:

Satz 1 *Die Tontafel Plimpton 322 enthält* **alle** *pythagoräischen (primitiven) Dreiecke mit regulärer Höhe < 15000 und Winkeln zwischen* $45°$ *und* $58°$.

Rückblickend auf den Paragraphen 4 läßt sich daraus folgende Aussage ableiten:

Korollar 2 *Die Quadrate aller Einheitsstab-Schattenlängen mit Sonnenstrahl-Einfallswinkel zwischen* $45°$ *und* $58°$*, die sich im babylonischen Zahlensy-stem exakt mit Hilfe pythagoräischer Dreiecke mit Kathetenbeschränkung von Satz 1 erfassen lassen, sind vollständig in der ersten Spalte der Tontafel Plimpton 322 enthalten.*

6 Pythagoräische Reihen zur Erfassung primitiver Dreiecke

Der Sprung von der Antike (Pythagoras) zur Neuzeit der Mathematik (ab 1700) führt uns zunächst zu Pierre de Fermat (1607-1685). Er fragte nach der Darstellbarkeit von Primzahlen als Summe zweier natürlicher Quadratzahlen. Sofort lässt sich das Problem als Suche nach rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Katheten, deren Quadratsumme eine Primzahl ist, interpretieren. Er formulierte das richtige Lösungs-Kriterium, musste den Beweis allerdings der Nachwelt überlassen. Auf die weitere historische Entwicklung gehen wir in Paragraph 8 ein.

Im vorliegenden Abschnitt sollen in unserem Zahlensystem alle primitiven geordneten pythagoräischen Tripel/Dreiecke mit beschränkter Hypothenuse:

$$(b, h, d) \in \mathbb{N}^3, \quad b^2 + h^2 = d^2, \quad 0 < b < h < d < 20000,$$

gefunden werden. Aus historischen Gründen stellen wir als erstes die *pythagoräische Zählreihe* auf, die später zu einer Jacobischen Theta-Reihe erweitert wird. Sie beginnt folgendermaßen:

$$q^5 + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + q^{74} + q^{82} + 2q^{85} + ...$$

Hierbei ist q vorerst eine Unbestimmte. Der Koeffizient von q^d ist die Anzahl der primitiven geordneten Quadratsummen-Darstellungen $b^2 + h^2$ von d^2 wie in (6). Beispielsweise gibt es für $d = 65$ zwei Darstellungen, nämlich

$$16^2 + 63^2 = 65^2 \quad \text{und} \quad 33^2 + 56^2 = 65^2.$$

Man überlegt sich schnell, dass gerade Exponenten nicht vorkommen können. Man kann aus der Reihe sofort die Anzahl $Pyth(N)$ aller solcher Tripel bis zu jeder vorgegebenen Hypothenusen-Schranke N angeben. Man setze einfach $q = 1$ im Reihenabschnitt bis N. Im Mathe-Notebook beschränkte ich mich auf einige $N \leq 20000$, ähnlich wie die Babylonier, nur ohne deren Beschränkung durch deren hexagesimales Zahlsystem:

$$\begin{bmatrix} N: & 100 & 1000 & 10000 & 20000 \\ Pyth(N): & 16 & 158 & 1593 & 3186 \end{bmatrix}$$

Der letzten Spalte entnehmen wir speziell die folgende Aussage:

Satz 3 *Es gibt genau 3186 primitive geordnete pythagoräische Dreiecke mit Hypothenuse* $N \leq 20000$.

Jetzt ersetzen wir in der Zählreihe die Anzahl-Koeffizienten von jedem q^d durch alle geordneten primitiven Lösungspaare $[b, h]$ der Tripel - Gleichung $b^2+h^2 = d^2$. Dieses Konstrukt wird dann *pythagoräische Lösungsreihe* genannt. Sie ist die **Fortsetzung der Plimpton-Tafel mit digitalen Mitteln**. Es ist nicht schwierig, sie im Mathe-Notebook bis zum Glied q^{10000} (ungeöffnet) aufzustellen. Einzelne Abschnitte lassen sich dann leicht aufrufen. Der Reihenanfang bis q^{100} sieht so aus:

$$\begin{aligned} &[3,4]q^5 + [5,12]q^{13} + [8,15]q^{17} + [7,24]q^25 + [20,21]q^{29} + [12,35]q^{37} \\ &+[9,40]q^{41} + [28,45]q^{53} + [11,60]q^{61} + ([16,63],[33,56])q^{65} + [48,55]q^{73} \\ &+([36,77],[13,84])q^{85} + [39,80]q^{89} + [65,72]q^{97} \end{aligned}$$

Leicht[2] lässt sich auch das erste Reihenglied mit 4 Lösungen finden, und zwar

$$([4773, 5236], [2324, 6693], [357, 7076], [3116, 6363])q^{7085}.$$

Am Beispiel $d = 7085$ wollen wir die Aufstellung der pythagoräischen Reihe und den Algorithmus zur Dreiecks-/Tripel-Gewinnung erläutern. Das Quadrat (Norm) von 7085 wird in Gaußsche Primzahlen zerlegt:

$$7085^2 = (1 + 2i)^2(1 - 2i)^2(3 + 2i)^2(3 - 2i)^2(3 + 10i)^2(3 - 10i)^2$$

Eine *Seminorm* von 7085^2 ist eine (ganze) Gaußsche Zahl $\alpha = a + bi$ mit Norm

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 = 7085^2.$$

Es gibt in unserem Falle genau 4 nichtassoziierte Seminormen:

$$\begin{aligned} (1 + 2i)^2(3 + 2i)^2(3 + 10i)^2 &= 6693 - 2324i, \\ (1 + 2i)^2(3 + 2i)^2(3 - 10i)^2 &= 4773 + 5236i, \\ (1 + 2i)^2(3 - 2i)^2(3 + 10i)^2 &= -6363 - 3116i, \\ (1 + 2i)^2(3 - 2i)^2(3 - 10i)^2 &= 357 - 7076i. \end{aligned}$$

[2]Reihenbezeichnung: PyTR; Abschnitte mit selbstgebautem Zwischenreihen-Befehlen (procedure) Zw(PyTR,1,100) bzw. Zw(PyTR,7085,7085) abgerufen.

Das sind alle Möglichkeiten, denn wir wechseln bei der ersten Seminorm von den Primfaktoren $3 + 2i, 3 + 10i$ jeweils zu ihren konjugierten (bei Fixierung des ersten). Von den Real- und Imaginärteilen liest unser Algorithmus dann die pythagoräischen Tripel ab:

$$[2324,6693,7085],[4773,5236,7085],[3116,6363,7085],[357,7076,7085].$$

Aus den Anfängen einer Zahlentheorie-Vorlesung ist bekannt, dass genau diejenigen ungeradennatürlichen $d > 1$ Hypothenusen pythagoräischer Dreiecke sind, deren natürliche Primteiler alle $\equiv 1\, modulo\, 4$ sind. Die Anzahl der Seminormen solcher zulässiger d hat die einfache Berechnungsformel

$$2^{t(d)-1},$$

wobei $t(d)$ die Anzahl der Primteiler von d ist. Auf diese Weise werden die Exponenten und Koeffizienten der pythagoräischen Reihe gewonnen.

Für Primzahlen p erhält man die alte Fermatsche Behauptung, dass genau diejenigen mit $p \equiv 1\, mod\, 4$ Summen zweier natürlicher Quadrate sind, und zwar mit eindeutig bestimmten Summanden.

Die Arithmetik des Ringes $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen wurde C.F. Gauß selbst beim Beweis des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes (1838) entwickelt.

7 Approximation von Quadratwurzeln

Natürlich interessierten sich die Babylonier auch für die Diagonale eines Quadrates, sagen wir mit Seitenlänge 1. Erstaunlicherweise konnten sie $\sqrt{2}$ bis auf ein Millionstel genau im Hexagesimalsystem approximieren, vgl. Tonscheiben-Schema [Bild 2][0]. Für das Notebook ist das ein Kinderspiel. Man braucht nur noch eine weitere Art von Mittelwerten zweier Zahlen, nämlich das *harmonische Mittel*: $H(u, v) = \frac{2uv}{u+v}$. Für $0 < u < v$ erhält man die Abschätzung

$$u = u_0 < u_1 := H(u, v) < \sqrt{uv} < \frac{u + v}{2} =: v_1 < v_0 = v.$$

Iteration liefert die Approximationen des geometrischen Mittels $\sqrt{uv}$ durch Einschachtelung: Die u_i-Folge und die v_i-Folge approximieren die Wurzel von unten bzw. von oben.

Um speziell $\sqrt{2}$ zu approximieren, starten wir mit $u = 1, v = 2$:

i	u_i		$\sqrt{u_i v_i}$		v_i
0	1	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	2
1	1.333333	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1.500000
2	1.411765	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1.416666
3	1.414211	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1.414216
4	1.414214	$<$	$\sqrt{2}$	$<$	1.414214

[0]Original in Google: Yale Table, Wikipedia

Damit ist $\sqrt{2}$ auf 6 Stellen nach dem Komma genau berechnet. Die Griechen kannten das harmonische Mittel und konnten so die mysteriöse Angabe der Babylonier nachvollziehen. Die Babylonier selbst kamen wohl mit einer Approximationsfolge $a_1, a_2, a_3, ...$ aus, die man der folgenden Vereinfachung der obigen Einschachtelung entnehmen kann:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & = & v & > & 1 & = & u \\
a_1 & = & \frac{1}{2}\cdot(v+\frac{2}{u}) & > & \sqrt{2} & > & \frac{2}{a_1} \\
a_2 & = & \frac{1}{2}\cdot(a_1+\frac{2}{a_1}) & > & \sqrt{2} & > & \frac{2}{a_2} \\
a_3 & = & \frac{1}{2}\cdot(a_2+\frac{2}{a_2}) & > & \sqrt{2} & > & \frac{2}{a_3} \\
 & & \text{u.s.w.} & & & &
\end{array}$$

Der Verdacht, dass die Wurzel von 2 gar keine rationale Zahl ist (inkommensurabel), wurde im 5. Jahrhundert v.u.Z. vom Griechen Theodorus von Cyrene bestätigt. Er wies es für die Wurzeln der ersten Primzahlen bis 17 nach. Für weitere fehlte noch der Ausbau der elementaren Zahlentheorie, wie man ihn später in Euklids "Elementen" findet.

8 Jacobis Theta-Reihe und der Zwei-Quadrate-Satz

Die Anzahl derLösungen der diophantischen Gleichung $x^2 + y^2 = n$ wird durch die Koeffizienten der zweiten Potenz einer klassischen Theta-Reihe angegeben, siehe [BF],VII.1. Genauer verwendet man:

$$\vartheta(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} = 1 + 2\sum_{n>0} q^{n^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+q^{2k-1})^2,$$
$$q = e^{2\pi i\tau},\ \tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C};\ Im\, z > 0\},$$

Deren Quadrat $\vartheta^2(\tau)$ läßt sich koeffizientenweise leicht bis zur q-Potenz von 1000000 berechnen, was uns ermöglicht, alle pythagoräischen Dreiecke mit Hypothenuse bis 1000 zu erfassen. Statt ϑ^2 berechnen wir gleich θ:

$$\begin{array}{ll}
> & G := 10^6 + 1; g := 1000 : \\
 & \vartheta := taylor(1 + 2\cdot(sum(q^{m^2}, m = 1..g)), q, G) : \\
 & T_0 := taylor(\frac{1}{4}\cdot(\vartheta^2 - 1), q, G)
\end{array}$$

Z.B. kann man mit dem Befehl Zw(T_0,1,30) dann den folgenden Anfangsabschnitt $T_0(30)$ der Reihe abrufen:[3]

$$\begin{aligned}T_0(30) = q + q^2 + q^4 + 2q^5 + q^8 + q^9 + 2q^{10} + 2q^{13} + q^{16} \\ + 2q^{17} + q^{18} + 2q^{20} + 3q^{25} + 2q^{26} + 2q^{29}\end{aligned}$$

Wir haben die Konstante 1 weggelassen. Durch 4 geteilt können wir von den Koeffizienten q^n, $n > 0$, jetzt die Anzahl der nichtnegativen Lösungen von $x^2 + y^2 = n$ ablesen. Wir wollen nur noch die positiven Lösungen haben. Dazu müssen wir einfach alle Glieder mit quadratischen Exponenten abziehen. Mit einem Schlag erreichen wir das, indem wir $t_1 := \sum_{i=1}^{g} q^{i^2}$ subtrahieren. Die Exponenten der Reihe $T_1 := T_0 - t_1$ sind gerade die Normen $a^2 + b^2$ der ganzen Gaußschen Zahlen $a + bi$. Der Koeffizient von q^n stimmt mit der Anzahl der (ungeordneten) Paare a, b mit $a^2 + b^2 = n$, $0 < a, b$, überein. Wir nennen $(a, b, \sqrt{n})$ in diesem Falle ein *pythagoräisches Wurzel-Tripel*, das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen des Tripels, ein *pythagoräisches Wurzel-Dreieck*. Durch Abzug der Reihe $\sum q^{2j^2}$ und anschließender Division durch 2 erhalten wir die pythagoräische Wurzelreihe T_3 geordneter Dreiecke. Von ihr liest man die Anzahl geordneter (d.h. mit $a < b$) Wurzel-Tripel/Dreiecke mit fixierter Hypothenuse $\sqrt{n}$ ab. Der Anfangsabschnitt bis q^{100} sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}q^5 &+ q^{10} + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{26} + q^{29} + q^{34} + q^{37} + q^{41} + q^{50}\\ &+ q^{53} + q^{58} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + q^{74} + q^{82} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97}\end{aligned}$$

Arithmetisch-geometrisch betrachtet werden alle Dreiecke mit ganzzahligen Katheten $0 < a < b$ mit Hypothenuse ≤ 1000 gezählt. Bezeichne $W(\sqrt{N})$ die Anzahl der geordneten pythagoräischen Wurzel-Tripel/Dreiecke der Hypothenuse $\leq \sqrt{N}$. Dann ergibt sich aus der Kenntnis von T_3 die folgende Tabelle:

$$\begin{bmatrix} N: & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000\\ W(\sqrt{N}): & 2 & 31 & 367 & 3842 & 39005 & 391840 \end{bmatrix}$$

Darin sind leider auch alle Dreiecke mit imprimitiven Kathetenpaaren erfasst. Es gelingt uns, die Teilreihe der primitiven $(a, b, \sqrt{N})$ herauszulösen. Wir nennen sie die *primitive pythagoräische Wurzelreihe*. Aufgeteilt in ungerade (bis 100) und gerade Exponenten (bis 200) findet man:

$$\begin{aligned}q^5 &+ q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53}\\ &+ q^{61} + 2\cdot q^{65} + q^{73} + 2\cdot q^{85} + q^{89} + q^{97} + ..\\ ..&+ q^{10} + q^{26} + q^{34} + q^{58} + q^{74} + q^{82} + q^{106} + q^{122}\\ &+ 2\cdot q^{130} + q^{146} + 2\cdot q^{170} + q^{178} + q^{194} + ...\end{aligned}$$

Die geraden auftretenden Exponenten sind gerade die 2-fachen der ungeraden. Die Reihe bestätigt den

Zwei-Quadrate-Satz. (Formulierung von P. Fermat, Beweis von Euler in drei Arbeiten: 1747, 1758, 1760 [N]). *Eine positive natürliche Zahl ist keine Summe*

[3] Einen Endabschnitt von T_0 kriegt man mit dem Aufruf Zw(T_0,999960,100000) , nämlich

$$\begin{aligned}2q^{999961} &+ 4q^{999962} + 2q^{999968} + 4q^{999970} + 12q^{999973}\\ &+ 2q^{999981} + 4q^{999986} + 4q^{999997} + 7q^{1000000}\end{aligned}$$

von zwei ganzen Quadraten genau dann, wenn sie in der Primzerlegung einen Primfaktor $q \equiv 1 \, mod \, 4$ in ungerader (höchster) Potenz enthält.

Nun lassen sich auch leicht die geordneten primitiven pythagoräischen Wurzel-Dreiecke zählen. Mit $PW(\sqrt{N})$ bezeichnen wir die Anzahl der primitiven geordneten pythagoräischen Wurzel-Dreiecke mit Hypothenuse $\leq \sqrt{N}$ (Norm $\leq N$):

$$\begin{bmatrix} N: & 10 & 100 & 1000 & 10000 \\ PW(\sqrt{N}): & 2 & 21 & 214 & 2168 \end{bmatrix}$$

Bemerkung 4 *Man muss jedes Mal außerdem noch das gleichschschenklige rechtwinklige Dreieck mit Seitenlängen $1, 1, \sqrt{2}$ hinzuzählen.*

Für jeden Abschnitt der Reihe lässt sich sofort per Algorithmus mit Hilfe Gaußscher Primzahlzerlegung die entsprechende Folge pythagoräischer Wurzel-Dreiecke aufstellen. Für ungerade Exponenten erhält man das Anfangsstück

$$\begin{aligned}
&[1,2]q^5 + [1,3]q^{10} + [2,3]q^{13} + [1,4]q^{17} + [3,4]q^{25} + [1,5]q^{26} + [2,5]q^{29} \\
&+[3,5]q^{34} + [1,6]q^{37} + [4,5]q^{41} + [2,7]q^{53} + [3,7]q^{58} + [5,6]q^{61} \\
&+([1,8],[4,7])]q^{65} + [3,8]q^{73} + [5,7]q^{74} + [1,9]q^{82} + ([2,9],[6,7])]q^{85} \\
&+[5,8]q^{89} + [4,9]q^{97}
\end{aligned}$$

Die Reihe bis zu q^{20000} ist die **Wurzelreihen-Fortsetzung der babylonischen Tontafel mit digitalen Mitteln**.

Einen Sprung zur Lösung des Problems der Darstellbarkeit von natürlichen Zahlen als Quadratsumme von mindestens vier Summanden gelang Lagrange 1770, siehe [N]:

Satz 5 (J.L. Lagrange) *Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadraten.*

C.G. Jacobi gelang mit Hilfe (der vierten Potenz) seiner Theta-Reihe ein völlig neuartiger Beweis dieses Satzes. Er konnte auch gleich noch die Anzahl der Darstellungen ablesen wie im Falle der binären Quadratsummen. Das war ein Meilenstein in der analytischen Zahlentheorie. Im nächsten Abschnitt wird dargelegt, dass es auch bei den ternären Quadratsummen nicht anders ist. Auch da gab es ein elementares Vorspiel.

9 Der Drei-Quadrate-Satz und die dreidimensionale Notebook-Version der Tontafel

Drei-Quadrate-Satz (A.-M. Legendre, s. [B],[F]). *Eine positive natürliche Zahl n ist genau dann als Summe von drei Quadraten ganzer Zahlen darstellbar, wenn*

$$n = 4^k \cdot m \text{ mit } m \equiv 1, 2 \text{ oder } 3 \, mod \, 4 \; aber \; \not\equiv 7 \, mod \, 8.$$

Wieder mit Hilfe der Gaußschen Primzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$ (und des Mathe-Notebooks) stellt man die (primitive geordnete) *pythagoräische Drei-Quadrate-Reihe* auf, die folgendermaßen beginnt:

$$\begin{aligned}&[1,2,2]q^3+[2,3,6]q^7+([1,4,8]+[4,4,7])q^9\\ &+([6,6,7]+[2,6,9])q^{11}+[3,4,12]q^{13}+([2,10,11],[2,5,14])q^{15}\\ &+([1,12,12],[8,9,12])q^{17}+([6,10,15],[1,6,18],[6,6,17])q^{19}\end{aligned}$$

Der Koeffizient von q^d sammelt die primitiven Lösungstripel $t < h < b$ der quadratischen diophantischen Gleichung $t^2 + b^2 + h^2 = d^2$. Geometrisch beschreibt ein jedes Tripel einen *pythagoräischen Quader* mit (ganzzahliger) Diagonale d, Tiefe t, Breite b und Höhe h. Die fortgesetzte Reihe $Qu3$ ist die **dreidimensionale Fortsetzung der Tontafel mit digitalen Mitteln**. Es ist nicht schwierig, sie bis zum Glied q^{1000} aufzustellen. Dann können wieder beliebige kurze Zwischenabschnitte abgelesen werden. Beispielsweise kann man sofort mit dem Befehl $Zw(Qu, 65, 65)$ alle (primitiven geordneten) pythagoräischen Quader mit Diagonale $d = 65$ ablesen:

$$([15,36,52],[25,36,48],[20,39,48],[7,24,60],[20,24,57])q^{65}$$

Es sind genau fünf. Durch Permutationen, Vorzeichensetzung und Hinzunahme imprimitiver Tupel gelangt man zur Zählreihe. Das ist nun wiederum die dritte Potenz ϑ^3 der Jacobischen Theta-Reihe, siehe [BF], VII.1. Sie beginnt[4] mit

$$\begin{aligned}&1+6q+12q^2+8q^3+6q^4+24q^5+24q^6+12q^8+30q^9+24q^{10}\\ &+24q^{11}+8q^{12}+24q^{13}+48q^{14}+6q^{16}+48q^{17}+36q^{18}+24q^{19}+24q^{20}\\ &+48q^{21}+24q^{22}+24q^{24}++30q^{25}+72q^{26}+32q^{27}+72q^{29}+48q^{30}\\ &+12q^{32}+48q^{33}+48q^{34}+48q^{35}+30q^{36}+24q^{37}+72q^{38}+24q^{40}\end{aligned}$$

Allerdings steht hier als Koeffizient bei q^n die Anzahl aller Lösungen der inhomogenen (ternären quadratischen) diophantischen Gleichung $x^2+y^2+z^2 = n$. Die Diagonallänge des Quaders mit Kanten einer Lösung [x,y,z] ist dann eine Wurzelzahl, nämlich $\sqrt{n}$. Mit dieser **dreidimensionalen (wurzeldiagonalen) pythagoräischen Zählreihe** kann man auch bequem die Lückenfolge des Drei-Quadrate-Satzes bestätigen. Für $n = d^2 = 65^2$ haben wir die Lösungen auf der Kugeloberfläche des Radius 65 visualisiert, siehe [Bild 3].

Lagrange und Gauss haben die Begriffe "äquivalent", "definit", "indefinit", "reduziert" usw. speziell für quadratische Formen eingeführt und viele Sätze in diesem Bereich bewiesen. Ein Ergebnis dieser Leistungen war der Beweis des Drei-Quadrate-Satzes von Legendre 1798, der eine Ungenauigkeit enthielt. Diese wurde später von Gauß beseitigt.

[4] per Befehl $Zw(\vartheta^3, 1, 40)$

10 Aktueller Ausblick: Eingreifen von Heckes Modulreihen in die nichteuklidische Kugel-Geometrie

In Heckes Arbeiten [He] über Modulformen höheren Niveaus kann man (mit Hilfe von Koblitz [K],VI.1) die Hecke-Reihe

$$H = \sum_{0<u\ odd} \sigma(u) \cdot q^u = q \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{4k})^4 (1+q^{2k})^4$$

entdecken, wobei $\sigma(m)$ die Summe aller Teiler von m bezeichnet. Die Zusammenhänge werden ausführlich in meiner hochaktuellen Arbeit [Ho] beschrieben. Dort werden orbitale Invarianten der nichteuklidischen (reell) vierdimensionalen Kugel behandelt, die zu solchen Reihen führen. Ein zentrales Ergebnis ist, dass die Reihen $\vartheta^2 \cdot H$ und ϑ^6 in einem zweidimensionalen Modulraum liegen. Darin liegt auch eine nichteuklidisch explizit konstruierte Reihe Cog. Die Linearkombination $80\vartheta^2 H - 12 Cog$ stimmt mit $\vartheta^6 = \vartheta^3 \cdot \vartheta^3$ überein. In ϑ^3 stecken die *Ballpunktzahlen* $b_n := \#\{[x,y,z] \in \mathbb{Z}^3;\ x^2+y^2+z^2=n\}$ als Koeffizienten. Die obige Linearkombination enthält über ϑ^2 die *Kreispunktzahlen* $k_m := \#\{[x,y] \in \mathbb{Z}^2;\ x^2+y^2=m\}$. Zusamengefasst erhält man die **nichteuklidische Relation der Kreis- und Ballpunktzahlen**

$$\left(\sum_{N=0}^{\infty} b_N q^N\right)^2 = \sum_{N=0}^{\infty} \left((1-12N) \cdot k_N + \sum_{m=0}^{N} (16 - 40 \cdot (-1)^m) \cdot k_{N-m} \cdot \sigma(m)\right) \cdot q^N$$

Das kann leicht mit dem Mathe-Notebook unter Verwendung des Zahlentheorie- Pakets, das die Zahlenfunktion σ enthält, für Anfangsabschnitte nachgeprüft werden. Um den exakten Beweis aus [Ho] vollständig vorzutragen, benötigt man ein Semester Spezialvorlesung für Studenten höherer Semester.

Historisch gesehen, entdeckte E. Picard am Ende des 19. Jahrhunderts die Rolle der Kugel bei der Lösung spezieller Differentialgleichungs - Systeme in zwei Variablen. Er wies fast ein halbes Jahrhundert später auf die arithmetische Bedeutung auch einzelner Fälle hin, in Analogie zu hypergeometrischen Reihen (Gauß Klein, Poincaré u.v.a.) Die Arbeit [HZ] von Hirzebruch und Zagier war ein weiterer Meilenstein für Arithmetik analytischer Reihen. Die Übereinstimmung verschieden konstruierter Reihen führte zu verblüffenden elementar-zahlentheoretischen Relationen, deren Beweis mit elementaren Mitteln nicht gelang. Ihre Arbeit basierte auf Heckes Aufspüren und tiefe Analysen von Modulform-Reihen [He]. Allerdings konnte in [HZ] keine Verbindung zur nichteuklidischen Geometrie negativer konstanter Krümmung hergestellt werden. Das gelang erst im neuen Millenium (siehe [Ho]).

Hundert Jahre zuvor erschienen in Paris populärwissenschaftliche Schriften von Henry Poincaré, siehe [TS]. Er erklärte Relativität anhand einer geschlossenen Kugel mit variabler Temperatur im Innern. Bewegen sich Lebewesen und

Gegenstände in Richtung sinkender Temperatur, so soll ihr Volumen proportional im gleichen Maße sinken. Da ihre Umgebung sich gleichmäßig verändert, nehmen sie den Schrumpfprozess nicht wahr. Sie tragen ihren eigenen lokalen Maßstab mit sich herum. Dieser ist also relativ. Angeregt - auch durch die Zukunftsromane von Jules Verne - wurde in den Cafés von Paris anfangs des vorigen Jahrhunderts eifrig daüber diskutiert. In Anbetracht solcher Zeitungsschlagzeilen wie "Dreht sich nun doch die Sonne um die Erde ?" beteiligten sich alle Schichten der Bevölkerung an den Erörterungen der neuen Sichtweise. Das entging damals im Berner Patentamt auch nicht dem jungen Albert Einstein.

11 Nachwort: Zur Beamer/Whiteboard-Präsentation des BMG-Vortrages

In den Schulen tauchen mehr und mehr Digitaltafeln (Whiteboards) mit Internet-Zugang auf, zusätzlich zur guten alten Kreidetafel. Software zum interaktiven Unterricht an der Digitaltafel muss wohl erst erarbeitet werden. Mein Vortrag sollte ein Beitrag dazu sein. Er wurde farbig, illustrativ, mit eingearbeiteten intern beschrifteten Bild-Fotos, dreidimensionalen beweglichen Bildern und dynamischen - schrittweise zu öffnenen - Fenstern gehalten. Alle Endeinstellungen wurden in einem pdf-File festgehalten und können auf meiner Homepage[5] betrachtet werden. Etwa die Hälfte meiner Fenster blieb den Zuhörern verborgen. Sie wurden in einer Werkstatt hinter dem letzten Zuschauer-Fenster zusammengefasst. Diese wurde vor dem Vortrag aktiviert. Alle nötigen Formeln, Prozeduren und Farben (es gibt 140) findet man dort. Für einen einzelnen Gestalter ist das aufwendig, kann aber dann immer wieder schnell umgebaut, aktualisiert, separiert, neu vorgetragen werden. Für die Lange Nacht der Wissenschaften, Notebooks und Lehrzwecke an den Digitaltafeln von Schulen habe ich "Lauras Vase", siehe [Bild 4], in den Vortrag eingearbeitet. Die (unsichtbare) Werkstatt besteht aus Farben, Pointplots, Kurven-Interpolation, kleine Kurven-Sammlung, alles einfach bereitstellbar. Die Öffentlichkeitsfenster beginnen mit dem Rotationsbefehl. Dann hat man schon eine dreidimensionale Vase, die man nach allen Seiten hin bewegen und als JPEG speichern, farbig besprühen, intern beschriften und sogar mit bunten Blümchen versehen kann. Die heutigen Digitaltasten-erprobten Schüler haben eine Menge Spaß dabei. Interaktiv, im Zwiegespräch, lassen sich durch gemeinsamen Besuch einer Werkstattecke Einstellungen ändern mit Gewinn mathematischer Fähigkeiten, hier: erste trigonometrische Schritte mit sofortigen räumlichen Auswirkungen zum besseren Verständnis von Lernformeln.

[5]www-irm.mathematik.hu-berlin.de/ holzapfl/

References

[Bild 1] Überschriftete Tontafel Plimpton 322[5]

[Bild 2] Yale tablet[5] (Schema)

[Bild 3] Ganzahlige Ballpunkte mit Radius 65[5]

[Bild 4] Lauras Vase [5]

[A] Abdulrahman A. Abdulaziz, The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples, "arXiv:1004.0025 v1 [math.HO] 31 Mar 2010", Google

[B] Baranouskaya, Volha , Summe von Quadraten und die Anzahl ihrer Darstellungen, Google

[BF] Busam, R., Freitag, E., Funktionentheorie, Kap. VI,VII, Springer, 1993

[EZ] Ebbinghaus, H.-D., and others, Numbers, Springer, 1991

[ES] Ecklin, Sabine, Zhlen ? Messen ? Wgen: Rechnen vor 4000 Jahren, Google

[EC] Erath, Christoph, Babylonische Mathematik mit Schwerpunkten aus der Zahlentheorie, Google

[F] Forster, Otto, Der Drei-Quadrate-Satz von Gauß , Google

[He] Hecke, E., Mathematische Werke; Vandenhoeck u. Ruprecht, 1970, 2. Aufl.

[HZ] Hirzebruch, F., Zagier, D., Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus; Inv. math. 36 (1976), 57 - 113.

[Ho] Holzapfel, R.-P., Enumerative Geometry for complex geodesics on quasi-hyperbolic 4-spaces with cusps, Proc. Conf. Varna 2002, In: Geometry, Integrability and Quantization, ed. by M. Mladenov, L. Naber, Sofia 2003, 42 - 87

[K] Koblitz, N., Introduction to elliptic curves and modular forms; Grad. Texts in Math. 97, Springer 1984.

[NS] Neugebauer, O., Sachs, A., Mathematical cuneiform tests, American Oriental Series, Vol. 29, New Haven, 1945

[N] Neumann, Olaf, Leonhard Euler und die Zahlen, Univ. Braunschweig, Mrz 2008, Preprint

[Pi] Pieper, Herbert, HEUREKA Ich hab's gefunden, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988

[5]siehe vorige Seite

[TS] Tjapkin, A., Shibanov, A., POINCARÉ, Moskau 1982

[Z] Zagier, Don, Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981