

Notebook-Reise ins Mathe-Land: Von Leonardo da Vinci ueber Columbus zu Newton, Gauß, Abel, Galois, bis zur digitalen Nullstellen-Drohne

Es ist so einfach wie mein TomTom im Auto: Ich gebe Start und Ziel ein und es zeigt mir meine Fahrroue an. Anschließend kann das Abfahren der Reiseroute simuliert werden, wobei ich zuvor noch eine Geschwindigkeit festlegen kann. Nach demselben Prinzip funktioniert mein selbst gebautes Gauß-Navy zum sichtbaren Auffinden einer Gleichungs-Lösung, was am Ende der Arbeit beschrieben wird.

Wir beginnen mit der Geschichte des Lösens algebraischer Gleichungen in einer Variablen. Dabei schildern wir den dramatischen Durchbruch zur Nullstellenformel kubischer Polynome. Stellvertretend für Gleichungen vierten Grades wird dann das ebene Ovoid (Eikurve) mit modernen Mitteln räumlich gedreht zum Ei des Kolumbus. Anschließend wenden wir uns dem Gaußschen Tagebucheintrag No. 80 (Braunschweig, Okt. 1797, [G]) zu: "Es ist durch eine natürliche Methode bewiesen worden, dass Gleichungen imaginäre Wurzeln haben." Wir bauen eine Nullstellen-Drohne, die auf eine zuvor ermittelte Fährte gesetzt wird, auf der sie jede Lösung explizit aufspürt. Über die Geschwindigkeitswahl hinaus kann die Drohne per Hand beschleunigt und gebremst werden, um genau an der richtigen Stelle die Lösung abzulesen. Dass dies allerdings nur annäherungsweise gelingen kann, lehrt uns die Galois-Theorie, deren Auslösung durch Niels-Henrik Abel (1802 - 1829) mit einem Beispiel kurz angedeutet wird.

Historischer Abriss

Lineare und quadratische Gleichungen sind Gegenstand des Schulunterrichts. Sie wurden schon in der Antike behandelt. Wir beginnen daher mit den kubischen Gleichungen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Durch kubische Ergänzung sieht man schnell ein, dass man nur die Gleichungen der Form $x^3 + 3px - 2q = 0$ zu beherrschen braucht.

Der Mathematiker und Franziskanermönch Luca Paccioli (1445 - 1514) war ein Freund von Leonardo da Vinci (1452 - 1519). Er berechnete zum Beispiel die Bronzemenge eines Reiterstandbildes für den Künstler. Nebenbei - aber zu seiner Zeit durchaus richtungsweisend - behauptete er, dass im allgemeinen kubische Gleichungen vom Typ $x^3 \pm ax + b = 0$ nicht lösbar seien. Für seine Behauptung gab er Beispiele an. Kurz danach (um 1500) jedoch wurden Lösungen von Scipione del Ferro (1465 - 1526) gefunden. Laut Cardanos "Ars magna" besaß letzterer bereits einen Weg zur Lösung aller kubischen Gleichungen. Seinen Freunden teilte del Ferro diesen mit, darunter auch seinem Schüler Antonio Maria Fior (16. Jhdt.). 1535 kam es zu einem Wettstreit der beiden Rechenmeister Fior und Niccolò Tartaglia (~1500 - 1557). Ersterer legte letzterem 30 kubische Gleichungen vor, die überraschend alle von Tartaglia termingerech gelöst wurden. Nun sollte Tartaglia sein Rechengheimnis preisgeben. Das tat er auch nach vielen Bitten, nachdem Geronimo Cardano (1501 - 1576) feierlich schwörte, dass er das Geheimnis streng bewahren würde. Tartaglia übergab den Lösungsansatz in nebligen Versen, die (frei interpretiert) folgende mathematische Anleitung enthielten:

$$x^3 + 3px = 2q \quad , \quad y - z = 2q \quad , \quad y \cdot z = p^3 \quad , \quad x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} \quad ,$$

woraus sich

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} + q} - \sqrt[3]{\sqrt{p^3 + q^2} - q}$$

herleiten lässt.

Cardano brach seinen Eid und veröffentlichte 1545 in seiner "Ars magna" die Lösungsmethode. Ein Jahr später beklagte Tartaglia in "Questiti et inventione diverse" öffentlich den Wortbruch Cardanos. Im Gegenzug schickte Cardano seinen Schüler Ludovico Ferrari (1522 - 1565) vor mit dem fälschlichen Vorwurf, dass Tartaglia auch nur von del Ferro abgekupfert hätte. Im Jahre 1548 kam es zu einem öffentlichen Streitgespräch gegen Ferrari, an dem sich Tartaglia beteiligte. Da Ferrari zu seinem Schutz mit einigen Raufbolden anrückte, blieb Tartaglia nichts weiter übrig, als sich gekränkt zurückzuziehen.

Ferrari entdeckte etwas später, wie man eine algebraische Gleichung vierten Grades arithmetisch behandeln muss, um sie zu lösen. Er führte das Problem auf die Auflösung einer kubischen und zweier quadratischer Gleichungen zurück. Statt eines Berichtes darüber visualisieren wir anhand eines Beispiels weiter unten das Ei des Kolumbus.

Geometrisierung

Langsam entwickelte sich die Koordinaten-Methode bei der Behandlung geometrischer Probleme. Lesenswert ist das 1637 erschienene Buch "La Geometria" von René Descartes (1596 - 1656). Bereits 1627/28 zeigte Descartes in einer Skizze, dass die Lösung einer Gleichung vierten Grades auf den Schnitt einer Parabel mit einem Kreis zurückgeführt werden kann.

Kein geringerer als Isaac Newton (1643 - 1727) befasste sich in Anlehnung an die Gleichungen dritten Grades detaillierter mit ebenen kubischen Kurven. Er teilte sie in fünf Typen ein, die er - dynamischen Überlegungen folgend - von den Normalform-Gleichungen

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$$

ablas. Die glatten Typen I, IV werden in der Animation (Ticker $t < 0$ bzw. $t > 0$) veranschaulicht. Sie haben zwei bzw. eine Zusammenhangskomponente. Bei $t = 0$ erhält man die singulären Typen V bzw. III. Descartes (auch schon Albert Girard, 1595 - 1632) begann Polynome in Produkte linearer Faktoren zu zerlegen. Von ersterem wurde dabei auch der Begriff "imaginärer Wurzeln" geprägt. Arithmetisch konnten nun die Typen folgendermaßen gedeutet werden:

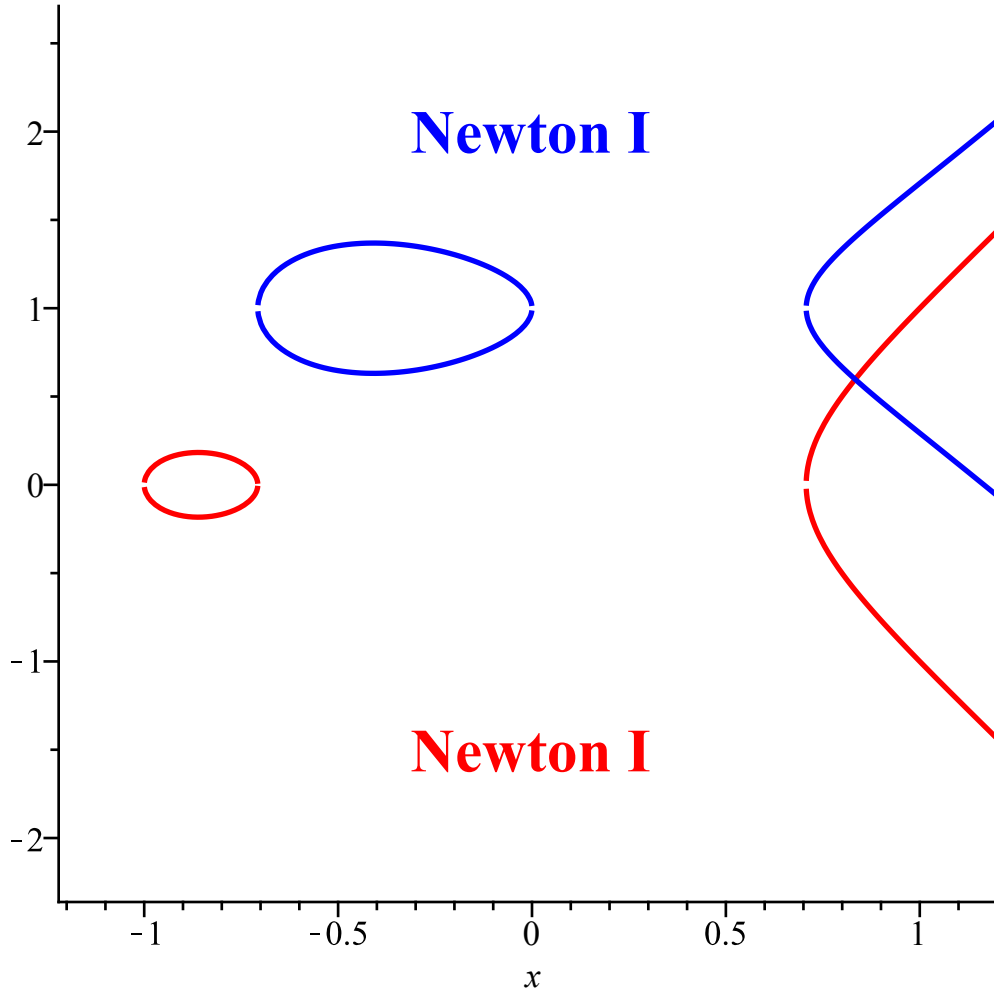
$$\text{Gleichungen : } y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

Typ I : α, β, γ verschiedene reelle Nullstellen;

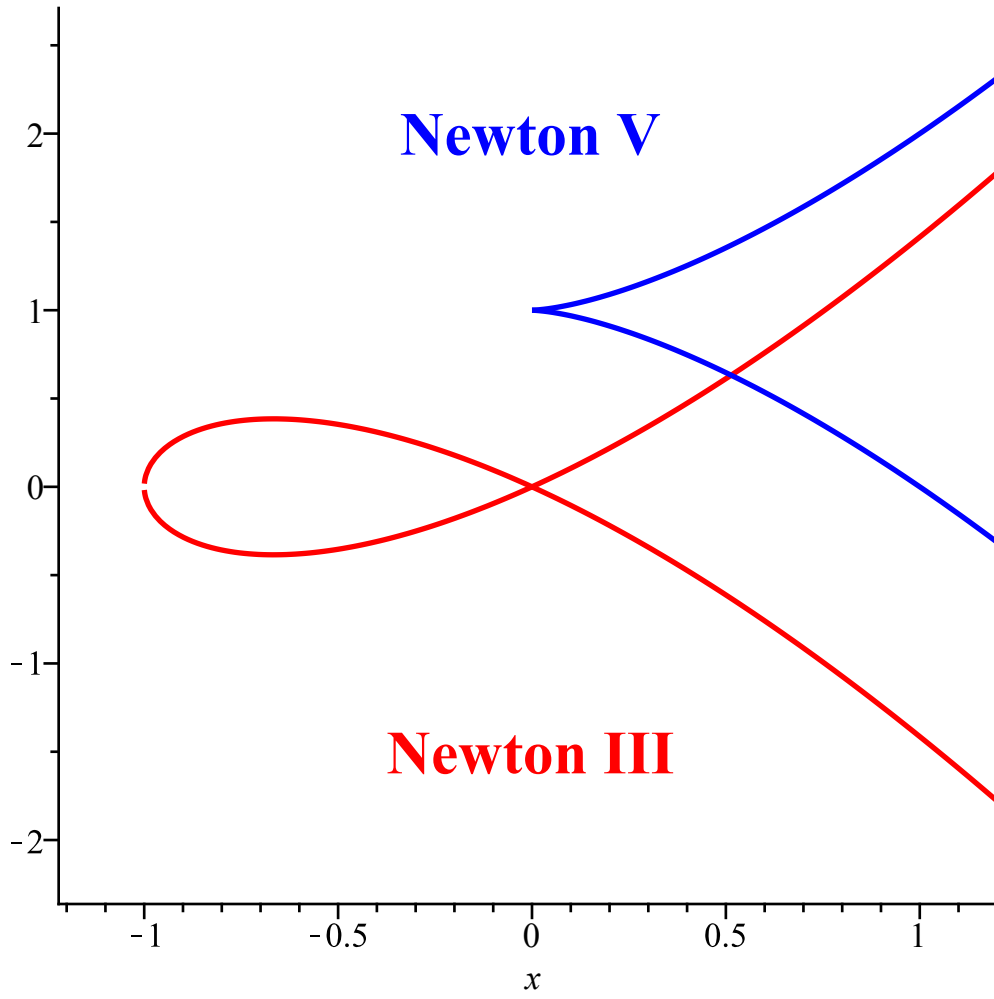
Typ IV : α reell, $\beta, \gamma \notin \mathbb{R}$, konjugiert komplex.

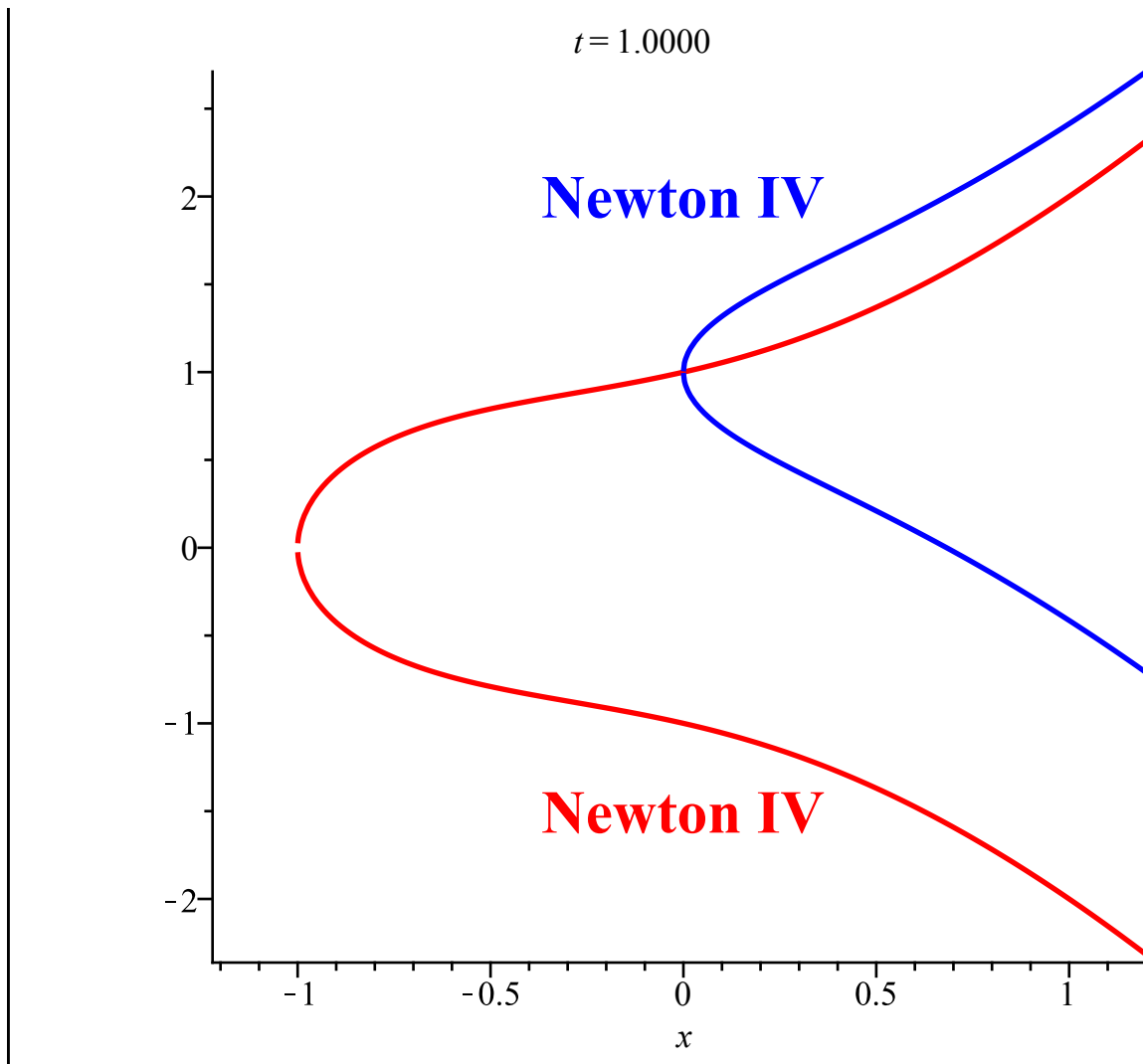
> Animation : $display(C_+, C_-, E_+, E_-, blau, rot)$:
 $display(C_+, C_-, E_+, E_-, blau1, rot1)$; $display(C_+, C_-, E_+, E_-, blau5, rot3)$; $display(C_+, C_-, E_+, E_-, blau4, rot4)$

$t = 0.50000$



$t=0.$





Es fehlt noch Typ II, der aus einem Punkt (kontrahiertes Oval) und einer Kurven-Komponente besteht. Wir verweisen auf [N], auf deutsch kommentiert in [W], S. 245.

Mit der Eulerschen Abkürzung i für $\sqrt{-1}$, lassen sich die Wurzeln β, γ des obigen kubischen Polynoms $x^3 - 3px + 2q$ angeben:

$$\beta = \varrho \cdot \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \varrho^2 \cdot \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}},$$

$$\gamma = \varrho^2 \cdot \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \varrho \cdot \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

mit der primitiven dritten Einheitswurzel $\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$.

Das Ei des Kolumbus

Als Beispiel einer Quartik in der Ebene sehen wir uns näher die Gleichung des Ovoids an, siehe [F], S. 32:

$$(x^2 + y^2)^2 - x^3 = 0$$

Auflösung nach y ergibt:

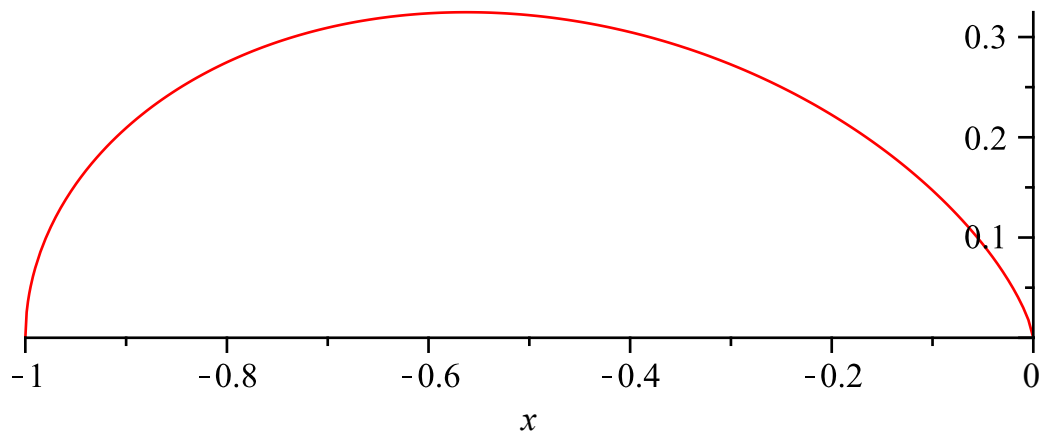
$$\left[\begin{array}{l} > \text{solve}((x^2 + y^2)^2 - x^3, y) \\ \sqrt{-x^2 + x^{3/2}}, -\sqrt{-x^2 + x^{3/2}}, \sqrt{-x^2 - x^{3/2}}, -\sqrt{-x^2 - x^{3/2}} \end{array} \right.$$

Aus den vier Möglichkeiten wählen wir

$$o := x \rightarrow \sqrt{-x^2 + \sqrt{x^3}}$$

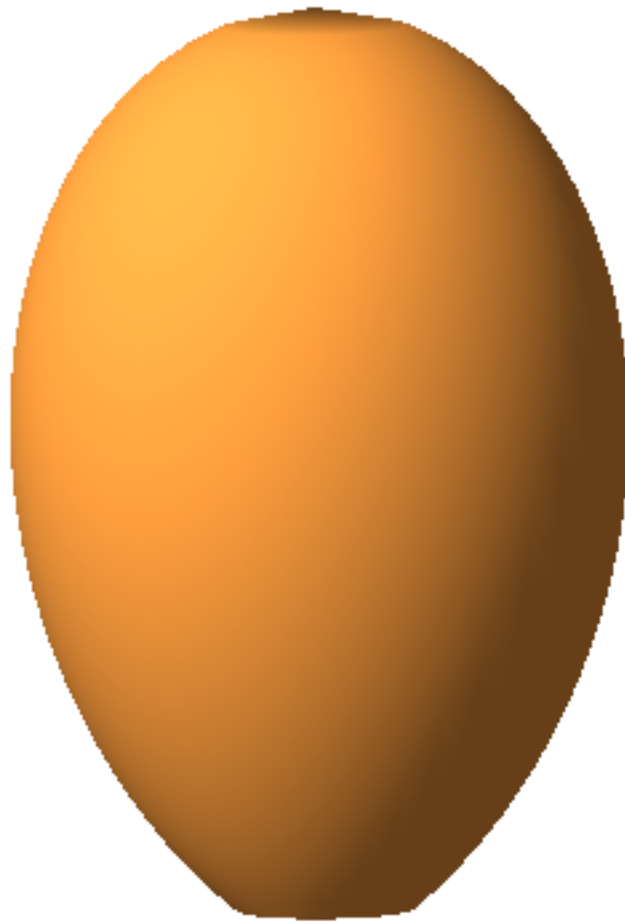
als Ei-Funktion. Daraus gewinnen wir die folgende

> Eikurve



Diese wird nun im Mathe-Notebook räumlich gedreht:

> *Dynamisch3D: KolumbusEi*



Carl-Friedrich Gauß (1777 - 1855) reichte 1799 seine Doktorarbeit ein. Das Ergebnis war ein Paukenschlag in der Entwicklung der Mathematik, und zwar in zweierlei Hinsicht: Erstens vom Ergebnis her und zweitens von der kreativen arithmetisch-geometrischen Anwendung der immer noch um 1800 allgemein geächteten imaginären Zahlen her. Das Resultat war der Fundamentalsatz der Algebra: Jede (echte) algebraische Gleichung hat (mindestens) eine Lösung im Bereich $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot i$ der komplexen Zahlen. Formuliert wurde der Fundamentalsatz in der Gaußschen Dissertation vorsichtigshalber als Zerlegungssatz für reelle Polynome in das Produkt linearer und quadratischer.

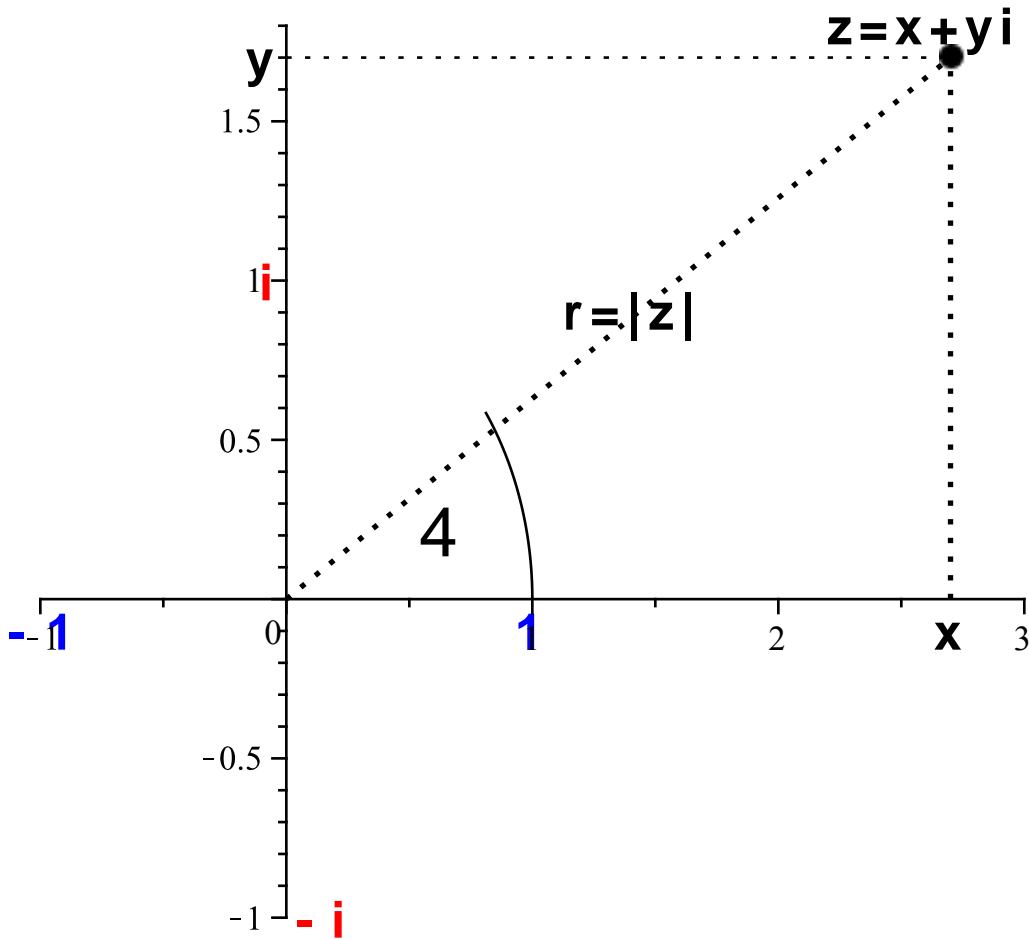
Erst 1931 führte Gauß in seiner Arbeit über das biquadratische Reziprozitätsgesetz die Bezeichnung "komplexe Zahlen" ein mit genauer arithmetisch-geometrischer Beschreibung. Rückblickend bemerkte er dazu (Werke **10**, No.1):

"Bei allem dem sind die imaginären Größen, solange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als vielmehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Größen auf gleiche Linie gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Methaphysik der imaginären Größen in ihr wahres Licht gesetzt. und nachgewiesen ist, daß diese, ebenso gut wie die negative, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben."

Durch die geometrische Interpretation als ebene Vektoren waren die komplexen Zahlen der bereits gut entwickelten analytischen Geometrie - und damit der Behandlung mit kartesischen Koordinaten und trigonometrischen Funktionen - zugänglich.

```
> display(seq(C_p, i = 1 ..14))
```

Gaußsche Zahlenebene



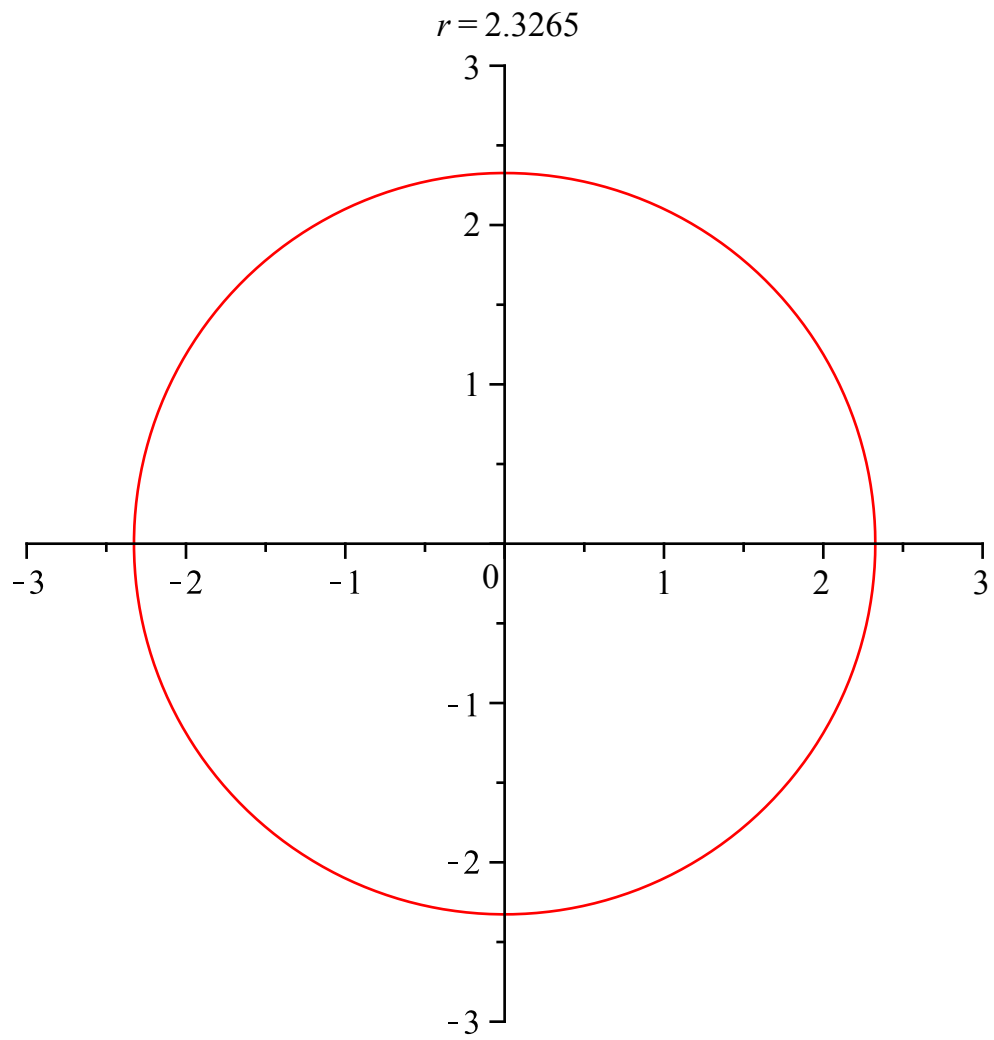
Polarkoordinaten : *Absolutbetrag* $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, *Argument* $\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right)$,
Real- und Imaginärteil : $x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$

Wir wollen nun für jedes nichtkonstante Polynom eine Drohne basteln, die die Nullstellen ζ desselben sichtbar aufspürt und uns ihre Daten - genauer deren Polarkoordinaten - explizit mitteilt. Diese Nullstellen-Drohnen setzen somit die Doktorarbeit von Gauß explizit-anschaulich mit modernen Mitteln fort. Wir demonstrieren es anhand eines Polynoms P . In unserem Notebook-Baukasten kann auch jedes andere Polynom eingesetzt werden. Wir wählen

$$P = Z^6 - 4Z^5 + 2Z^4 + 22Z^3 - 89Z^2 + 126Z - 90$$

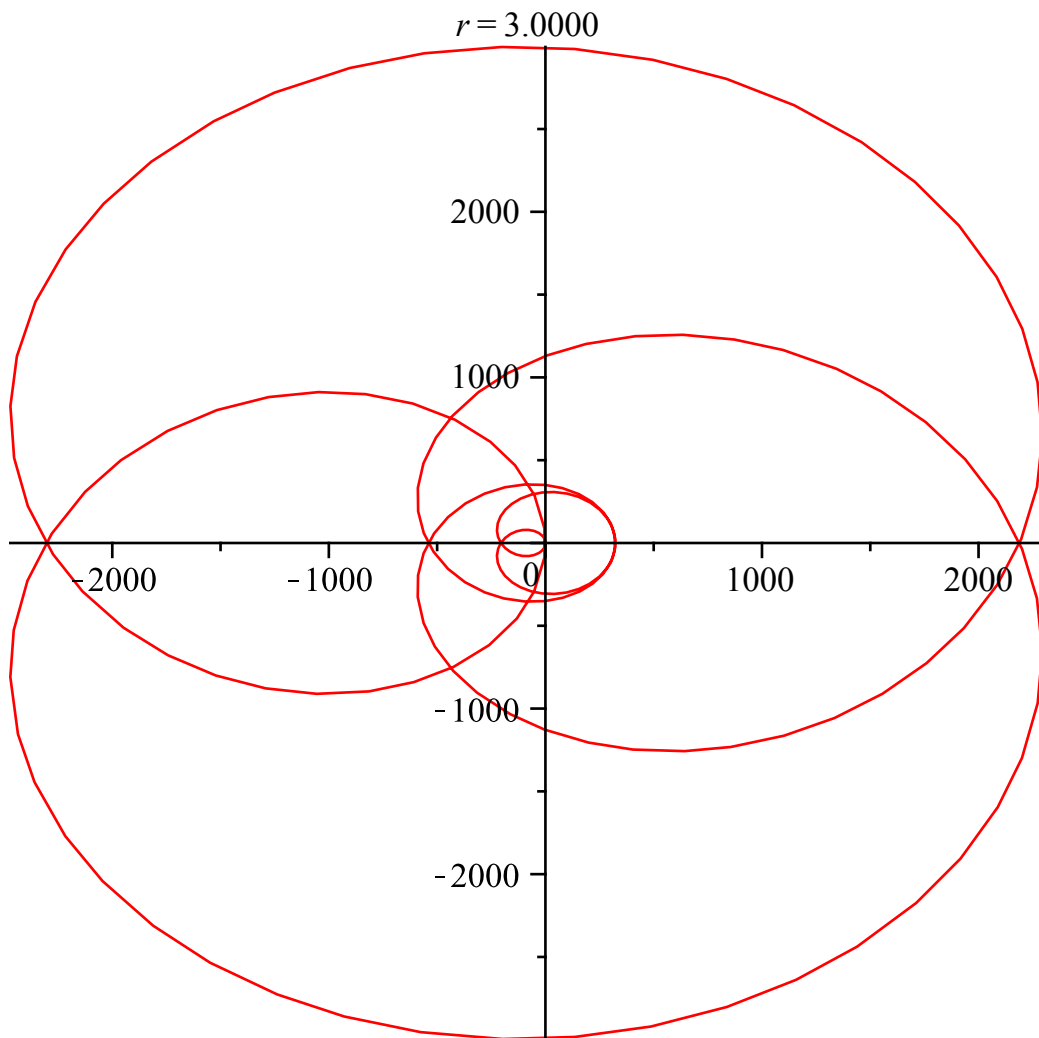
Nun durchlaufe z die gesamte Gaußsche Zahlenebene, und zwar entlang von Kreislinien mit beweglichem Radius r . Durch Substitution von z für Z und $|z| = r$ erhalten wir die

```
> Animation : KreisWelle
```

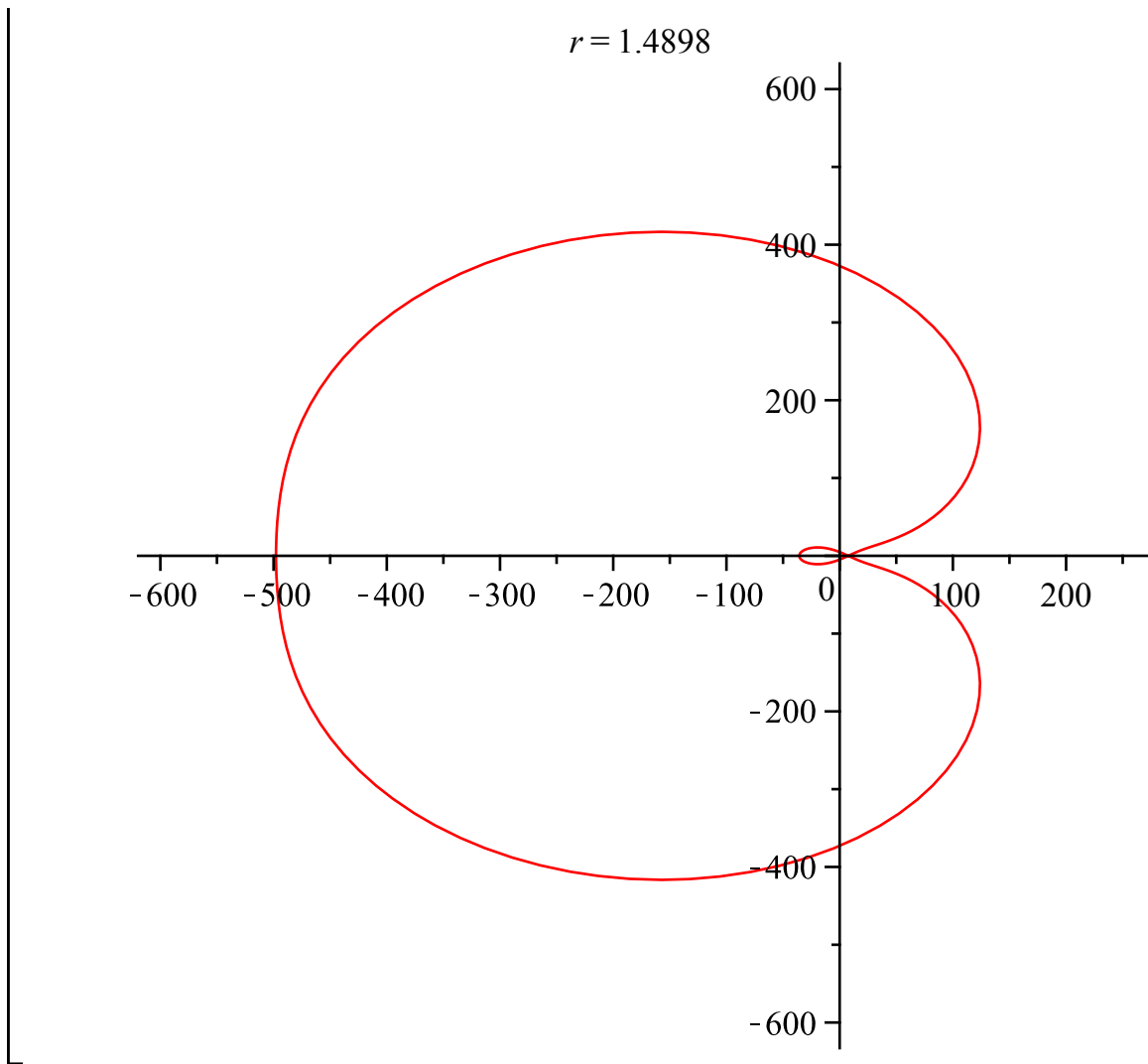
Die Bildpunkte bzgl. des Polynoms P erzeugen die

> *Animation : BildWelle*



Den Schnittpunkt 0 des Fadenkreuzes durchläuft diese Welle mehrmals. Der Ticker zeigt den Radius r der ursprünglichen Kreiswelle an. Durch feine Handsteuerung in der Bildwellen-Animation entnehmen wir ihr, dass der erste Durchlauf im Bereich $1 < r < 1.8$ liegt. Die folgende Animation vergrößert diesen Ausschnitt:

> *Animation : TeilWelle*

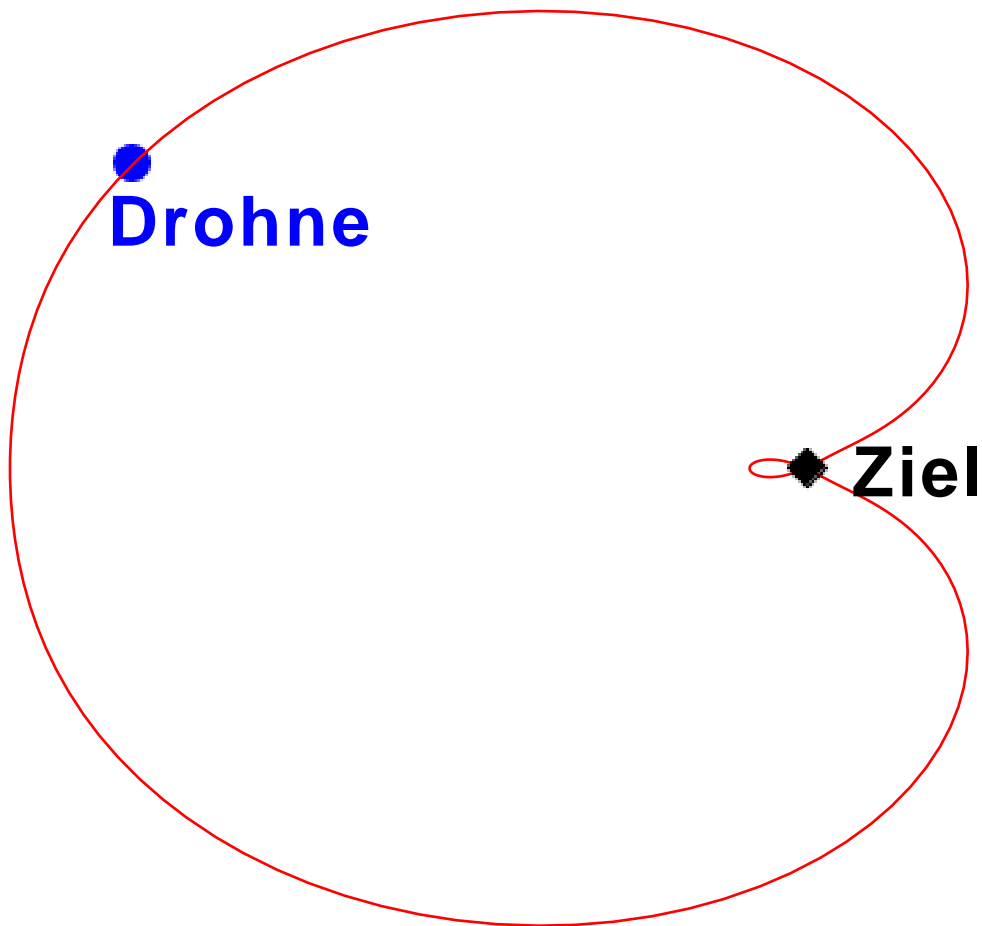


Nun kann man - wieder per Handbremse - genauer erkennen, dass Welle bei $r \sim 1.4$ durch den Nullpunkt läuft. Das geschieht offensichtlich zweimal, was leicht am Kreuzpunkt der bei 1.4 arretierten Welle erkennbar ist. Das bedeutet, dass das Polynom P ein Nullstellenpaar derselben Polarkoordinate $r \sim 1.4$ hat. Das ist typisch für ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar.

Jetzt halten wir die bei $r = 1.4$ arretierte Welle fest und setzen eine laufende Drohne (blau) auf die dermaßen festgelegte Spur. Mathematisch lassen wir z mit fixiertem Absolutbetrag 1.4 alle Argumente φ zwischen 0 und 2π durchlaufen.

> *Animation : Drohne*

$$4 = 2.6928$$



Per Handsteuerung können wir den Einschlag der Drohne ins Ziel bei $\varphi \sim 0.77$ beobachten. Damit haben wir für die erste Nullstelle ξ annähernd die Polarkoordinaten $r = |\zeta| \sim 1.4$ und $\varphi = \arg(\zeta) \sim 0.77$ ermittelt. Der zweite Drohneneinschlag lässt sich bei $2\pi - 0.77$ ablesen. Das entspricht der konjugiert komplexen Nullstelle. Umgerechnet ergibt sich $\zeta \sim 1.005 + 0.975i$. Mit dem Newtonschen Verfahren können die Werte verbessert werden. Nach drei Approximationsschritten erhält man genau $1+i$.

```

> z0 := 1.005 + 0.975 I; for k from 0 to 2 do z_{k+1} := evalf(Newt(P(Z), z_k)) od;
      z0 := 1.005 + 0.975 I
      z1 := 1.000067527 + 1.000113979 I
      z2 := 1.000000003 + 0.9999999982 I
      z3 := 1.000000000 + 1.000000000 I
  
```

Das Polynom wurde als Demonstrations-Beispiel mit ganzen Nullstellen gewählt. Somit erhalten wir durch Kombination der Nullstellen-Drohne mit dem Newtonschen Näherungs-Verfahren präzise alle 6 Nullstellen. Schneller wäre man natürlich mit Hilfe den Zerlegungsbehl in Linearfaktoren zum Ziel gekommen:

```

> factor(P(Z), I)
  
```

$$(Z-3)(Z+3)(Z-1+2I)(-Z+1+2I)(Z-1+I)(-Z+1+I)$$

Wir verwenden ihn als Probe.

Sind die Nullstellen eines Polynoms aus $\mathbb{C}[Z]$ jedoch jedoch nicht mit Hilfe rationaler Zahlen und übereinander geschachtelter Wurzelterme (Radikale) ausdrückbar, so lässt sich dieser Zerlegungsweg nicht beschreiten. Das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms liefert uns stets eine Nullstelle. Durch mehrmalige Anwendung mit verschiedenen Ausgangspunkten z_0 könnte man - bei glücklicher Wahl - dann eine Nullstelle nach der anderen gewinnen. Mit Newton allein arbeitet man jedoch blind. Der Zufall entscheidet darüber, ob und wann wir zum Ende kommen. Genau diese Unwägbarkeit wird nun mit Hilfe der Nullstellen-Drohne beseitigt. Näherungsweise sieht man alle Nullstellen. Jede dieser Näherungen wird dann mit dem Newton-Verfahren verfeinert. Wir führen das gleich anhand eines ganzzahligen Polynoms, das keine Radikal-Nullstelle hat, vor. Zuvor noch ein kurzer Einblick in die Weiterentwicklung der Geschichte zur Lösung algebraischer Gleichungen.

Rückblick zu Abel, Galois, Schur und nochmals Newton

Bis zum Grad 4 können die Nullstellen aller Polynome mit rationalen Koeffizienten durch Wurzeln ausgedrückt werden (siehe oben). Dass im allgemeinen algebraische Gleichungen nicht durch Radikale lösbar ist, wurde Anfang des 19. Jahrhunderts vom jungen norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 - 1829) entdeckt. Er zeigte, dass die allgemeine Gleichung 5. Grades nicht auf diese Weise gelöst werden kann. Er setzte die Gleichung mit unbestimmten Nullstellen an. Ein zufällig gewähltes Polynom mindestens fünften Grades hätte dann diese sperrige Eigenschaft. Das ist allerdings etwas neblig ausgedrückt. Bei einfach konstruierten Polynom - Gleichungen höheren Grades kann man nicht sicher sein, ob es zu den nicht (durch Radikale) auflösbaren gehört. Das liegt daran, dass man es meistens mit speziell gewählten einfachen Polynomen zu tun hat.

Der geniale französische Mathematiker Evariste Galois (1811 - 1832) fand ein notwendig und hinreichendes Auflösbarkeits-Kriterium für alle Polynome. Er betrachtete Substitutionen der abstrakten Nullstellen eines Polynoms untereinander und entdeckte die algebraische Struktur, die darin steckt. Sie wurde nach seinem frühen Tod Gruppe genannt - genauer im betrachteten Falle: Galois-Gruppe. Es war die Geburtsstunde der - heute in vielen Zweigen der Mathematik erfolgreich angewandten - Gruppentheorie.

Satz von Galois (in heutiger Formulierung). Ein irreduzibles Polynom ist auflösbar genau dann, wenn die zugehörige Galois-Gruppe auflösbar ist.

Einfach beschreibbares Polynome zu finden, deren Galoisgruppe nicht auflösbar sind, ist

keineswegs eine einfache Aufgabe. Beispielsweise gab Isaac Schur das Polynom $\sum_{k=0}^5 \frac{x^k}{k!}$

an mit der nichtauflösbaren Galoisgruppe S_5 , siehe Enzyklopädie [EM], S. 849. Die Normierung

zu $Q = x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 60x^2 + 120x + 120$ ändert nichts an dieser Qualität.

Man kann leicht mit dem Mathe-Notebook prüfen, dass die Befehle "solve(Q)" oder "factor(Q)" wirkungslos sind. Als erstes sieht man sofort, dass es sich um ein Eisenstein-Polynom handelt, denn die Primzahl $p = 5$ teilt - außer dem höchsten - alle Koeffizienten, aber p^2 teilt nicht das konstante Glied. Aus Algebra- und Zahlentheorie-Vorlesungen ist bekannt, dass Eisenstein-Polynome irreduzibel sind.

Lassen wir nun unsere Drohne auf Q los, so kann man mit ihrer Hilfe die Näherungswerte

$$n_1 := -2.15 - 0.13 \cdot I,$$

$$n_3 := -1.7 + 1.55 \cdot I,$$

$$n_5 := -0.04 - 3.1 \cdot I$$

ablesen. Das Newton-Verfahren gibt uns schnell die verstärkten Annäherungen

$$N_1 := -2.180607124 :$$

$$N_2 := -1.649502832 - 1.693933405 I :$$

$$N_3 := -1.649502832 + 1.693933405 I :$$

$$N_4 := 0.2398063935 + 3.128335026 I :$$

$$N_5 := 0.2398063935 - 3.128335026 I :$$

an die fünf Nullstellen von Q. Die Einsetzprobe zeigt, wie genau wir die Nullstellen tatsächlich erfasst haben:

$$\left[\begin{array}{l} > \text{expand} \left(\prod_{i=1}^5 (X - N_i) \right) \\ X^5 + 5.000000000 X^4 + 20.00000002 X^3 + 60.00000001 X^2 + 120.0000001 X + 120.0000001 \\ - 1.633356804 \cdot 10^{-9} I \end{array} \right. \quad (4)$$

Einen schnellen Einstieg in die Galois-Theorie, insbesondere zur Aufstellung der Galois-Gruppe eines irreduziblen Polynoms, findet man im Google-File [Mi] von M.S. Milne. Im Anhang A-35 wird dort $X^5 - 6 \cdot X^4 + 3$ als sehr einfaches Beispiel mit Galois-Gruppe S_5 angegeben. Dem Leser wird empfohlen, die Nullstellen mit Hilfe des Lösungs-Navigators und anschließendem Newton-Verfahren selbst möglichst nahe zu bestimmen.

Fazit

Wir hatten einigen Spaß, meine Enkeltochter Laura (13) und ich, beim gemeinsamen Navigieren zu Nullstellen. Schon quadratische Polynome sind visuell erlebenswert. In ihrer Schule sind zwar Computerr-Raum und Smartboard (Whiteboard, Digitaltafel) vorhanden. Seltsamerweise sind die Aufstellungsräume aber getrennt. Auch habe ich bei Gesprächen während der Langen Nacht der Wissenschaften in Erfahrung gebracht, dass Gauss - genauer die nach ihm benannte Zahlenebene - aus dem gymnasialen Unterricht verbannt wurde. Ich kann mich erinnern, dass die Zahlen in meiner damaligen Abiturklasse auf der Abendschule noch eingeführt wurden, trotz zeitlich notwendiger Kürzungen.

Gauß wurde zur Tür aus den Schulzimmern hinausgeworfen. Ich bin fest davon überzeugt, dass er durch die Fenster wieder Einzug hält, und zwar aus einigen Gründen:

1. Ganze Generationen haben mit Gauß gelebt. Die von ihm erforschten Zahlensysteme (auch die fürs Handy) gehören ganz einfach zu den Bildungsgrundlagen, die in den höheren Lehranstalten gelegt werden müssen.
2. Speziell ist das Lösen von Gleichungen eine Grundaufgabe von Mathematik und Technik. Funktionen und reelle Lösungen versteht man schlecht ohne die Gaußschen Grundlagen.
3. Unsere 150-jährige wirtschaftliche Erfolgsgeschichte mit und nach Gauß sollte nicht einfach weggebrochen werden.
4. Wenn schon Smartboard und Computerraum vorhanden sind, so entstehen kaum Kosten beides zusammenzuführen. Man braucht dann nur noch die nötige Software: Baukästen für kreative interaktive Aneignung von Lernstoffen. Mein Lösungs-Navigator benutzt einen solchen.
5. Da wir es gewohnt sind, des öfteren via Auto-Navy Signale eines GPS-Satelliten abzurufen und für die zu Routenplanung zu verwerten, liegt die Nullstellendrohne nahe an unserem Lebenserfahrungs-Bereich.

6. Imaginäre Zahlen verursachen bei Schülern sicher keine stressigen Kopfschmerzen. Die Schüler müssen ja nicht unbedingt damit rechnen, höchstens ein einfaches Einführungs-Beispiel. Weitere Rechnungen kann man getrost dem Mathe-PC überlassen. Die Glaubwürdigkeit an deren Ergebnisse ist ganz bestimmt vorhanden. Der Taschenrechner wird ja auch benutzt, ohne dass die Schüler die internen Rundungen trigonometrischer Rechnungen auf acht Stellen genau verstehen müssen.
7. Die beste Pädagogik ist diejenige, die mit Spiel und Spaß verbunden ist. Eine gegenteilige Kanalisation zum Stoff-Pauken schränkt die Kreativität ein mit Auswirkungen für die weitere Entwicklung junger Menschen.
8. Die heutigen Fertigkeiten der jungen Generation auf dem PC ist schon erstaunlich. Sie brennt darauf, mit diesem Vermögen kreative Aufgaben lösen zu können.
9. Der Drohnenflug lässt einen Beweis des Fundamentalsatzes erahnen, es ist schon ein gefühlter Beweis. Von einem Mathematik-Interessierten lässt er sich leicht zu einem echten Beweis erweitern, was ich als Übungsaufgabe nach einem Analysis-Jahr empfehle.
10. Dem Lernenden empfehle ich wärmstens, sich einen kreativen Prozess der großen Meister in der Wissenschaft anzueignen. Ohne einen solchen Einblick wird er nicht die Fähigkeit zu stärkeren Eigeninitiativen entwickeln können. Wir sind es unserem Nachwuchs schuldig, dass bei all den heutigen technischen Möglichkeiten nicht das kreative Element des Wissenserwerbs verloren geht (siehe Bologna). Denn diese Fähigkeit wird künftig dringender denn je benötigt, um den wichtigsten Aufgaben der Zukunft gewachsen zu sein.

Literatur

- [A] Abel, N.H., Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höheren Graden, als den vierten, allgemein aufzulösen, Crelle Journal **1**, 65 - 84
- [G1] Gauß, C.F., Mathematisches Tagebuch 1796 - 1814, Ostwalds Klassiker **256**, Akad. Verl.Ges., Geest & Portig, 4. Aufl., Leipzig 1985
- [G2] Gauß, C.F., Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (Helmstadii 1799)
- [E] Euler, L., Zur Theorie komplexer Funktionen, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, **261**, Geest & Portig, Leipzig, 1983
- [F] Fischer, Gerd, Ebene algebraische Kurven, Vieweg studium, Aufbaukurs Mathematik, Braunschweig/Wiesbaden, 1994
- [HS] Hirsch, M.W., Smale, S., On algorithms for solving $f(x) = 0$, Comm. Pure Appl. Math. **32**, 281 - 312
- [J] Juschkewitsch, A.P., Einführung zur Sammlung von Aufsätzen L. Eulers zur Theorie der Funktionen komplexer Variabler, Einführung in [E], S. 8 - 48
- [K] Kneser, M., Ergänzung zu einer Arbeit von Hellmuth Kneser über den Fundamentalsatz der Algebra, Math. Z. **177**, 285 - 287
- [Mi] Milne, M.S. Fields and Galois Theory, Version 4.30, 2012, Google, pdf-file
- [Mr] MrYouMath: <http://www.youtube.com/watch?v=G9K6BQRL6ZE&feature=related>

- [ME] Matematitscheskaja Enzpklopedia, Isdatelstwo "Sowjetskaja Enzpklopedia", 1977
- [N1] Newton, Isaac, Enumeratio linearum tertii ordinis, London, 1704, S. 531 - 560 in [N]
- [N] Newtoni, Isaaci, Opera quae extant omnia, Tom I, London, 1779 - 1785
- [W] Wieleitner, Heinrich, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung, Göschen, Leipzig, 1905