

**Notebook-Reisen ins Mathe-Land:  
Von der babylonischen Winkelmess-Tafel zu  
Pythagoras, Fermat, Euler, Gauß, Jacobi und Dedekind**

**Inhalt:**

1. Mittelwert-Erzeugung der Tafel
2. Vergleich mit der babylonischen Tontafel und Winkel-Vollständigkeit
3. Sonnenkalender: eine mögliche (antike) Anwendung
4. Vergleich mit der Quadratsummen-Methode
5. Die pythagoräische Reihe zur Erfassung primitiver pythagoräischer Dreiecke
6. Approximation von Quadratwurzeln
7. Jacobis Theta-Reihe und der Zwei-Quadratsummen-Satz
8. Der Drei-Quadratsummensatz und die 3-dimensionale Notebook-Version der Tontafel
9. Ausblick: Komplex-nichteuklidische Scheiben und Kugeln,  
Eingreifen Heckescher Modulformen
10. Lauras Töpferei, Empfehlung zur Langen Nacht der Wissenschaften
11. Anhang: MAPLE-Panorama

**§1. Mittelwert-Erzeugung der Tafel**

0Dreieck (mit Keilschrift)

1Tafel (Foto der Tontafel Plimpton 322)

§1

$$b = \frac{v-u}{2}, \text{ geometrisches Mittel } h = \sqrt{uv}, \text{ arithmetisches Mittel } d = \frac{u+v}{2}$$
$$b^2 + h^2 = d^2$$

Sechziger/Hexagesimal-System:  $\left\{ \sum_{m=0}^M r_m \cdot 60^m + \sum_{n=1}^N s_n \cdot 60^{-n} \right\} = \mathbb{Z}[60^{-1}] \subset \mathbb{Q}, 0 \leq r_m, s_n < 60;$

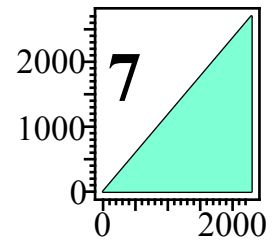
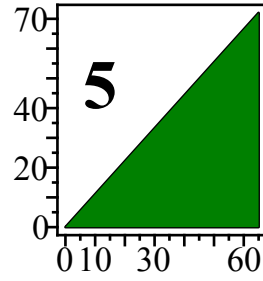
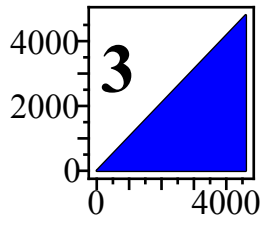
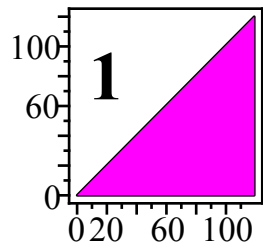
nur "reguläre"  $h$  zulassen, d.h.  $\frac{1}{h} \in \left\{ \sum_{n=1}^N s_n \cdot 60^{-n} \right\}$

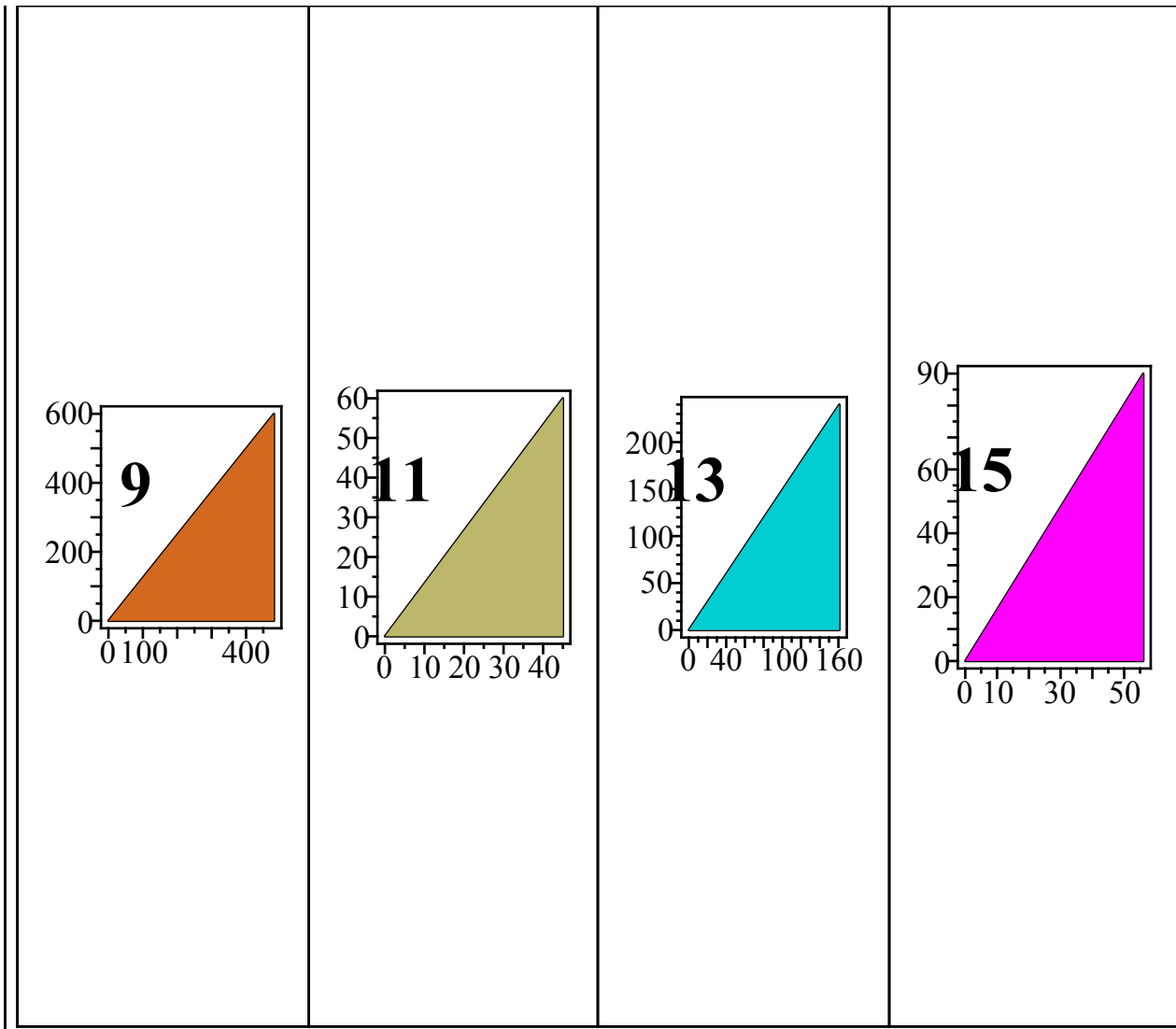
Mittelwert-Tabelle (**fett: Tontafel-Spalten**)

<i>Winkel</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>Nr</i>
45.2°	$2 \cdot 5^2$	$2^5 \cdot 3^2$	119	<b>120</b>	<b>169</b>	<b>1</b>
45.7°	$2 \cdot 3^6$	$2^{13}$	3367	<b>3456</b>	<b>4825</b>	<b>2</b>
46.2°	$2^{11}$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$	4601	<b>4800</b>	<b>6649</b>	<b>3</b>
46.7°	$2^3 \cdot 3^6$	$2 \cdot 5^6$	12709	<b>13500</b>	<b>18541</b>	<b>4</b>
47.9°	$2^5$	$2 \cdot 3^4$	65	<b>72</b>	<b>97</b>	<b>5</b>
48.4°	$2 \cdot 3^4$	$2^5 \cdot 5^2$	319	<b>360</b>	<b>481</b>	<b>6</b>
49.7°	$2 \cdot 5^4$	$2^3 \cdot 3^6$	2291	<b>2700</b>	<b>3541</b>	<b>7</b>
50.2°	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$2^{11}$	799	<b>960</b>	<b>1249</b>	<b>8</b>
51.2°	$2^5 \cdot 3^2$	$2 \cdot 5^4$	481	<b>600</b>	<b>769</b>	<b>9</b>
52.6°	$2^7 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^8$	4961	<b>6480</b>	<b>8161</b>	<b>10</b>
53.1°	2	$2^3$	3	(4)	(5)	<b>11</b>
55.0°	$2 \cdot 5^4$	$2^9 \cdot 3^2$	1679	<b>2400</b>	<b>2929</b>	<b>12</b>
56.2°	$2^7$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	161	<b>240</b>	<b>289</b>	<b>13</b>
56.8°	$2 \cdot 3^6$	$2^3 \cdot 5^4$	1771	<b>2700</b>	<b>3229</b>	<b>14</b>
58.1°	$2 \cdot 5^2$	$2 \cdot 3^4$	56	<b>90</b>	<b>106</b>	<b>15</b>
58.7°	$2 \cdot 3^4$	$2^9$	175	288	337	<b>16</b>

in No.11: 60, 75 (auf PlimptonTafel) statt 4, 5  
2NippurElle

> *display(S); display(U);*





Bezeichnung/Namensgebung von rechtwinkligem Tor entlehnt: b Breite, h Höhe, d Diagonale

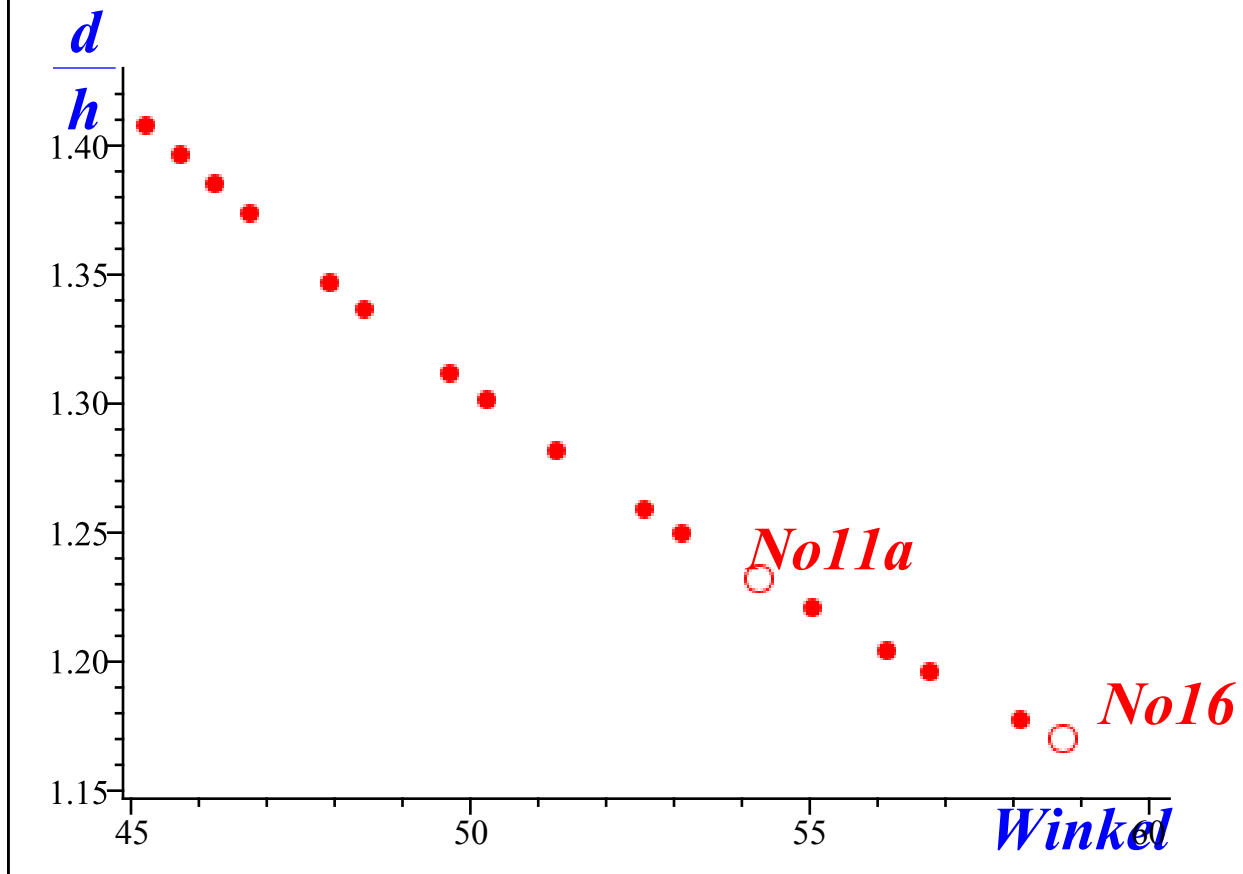
## §2. Vergleich mit der babylonischen Tontafel und Winkel-Vollständigkeit

3TafelPhoto

4TafelPhoto

>  $L_1$ ;

# Graphik der Tontafel Plimpton 322 mit zwei blinden Passagieren

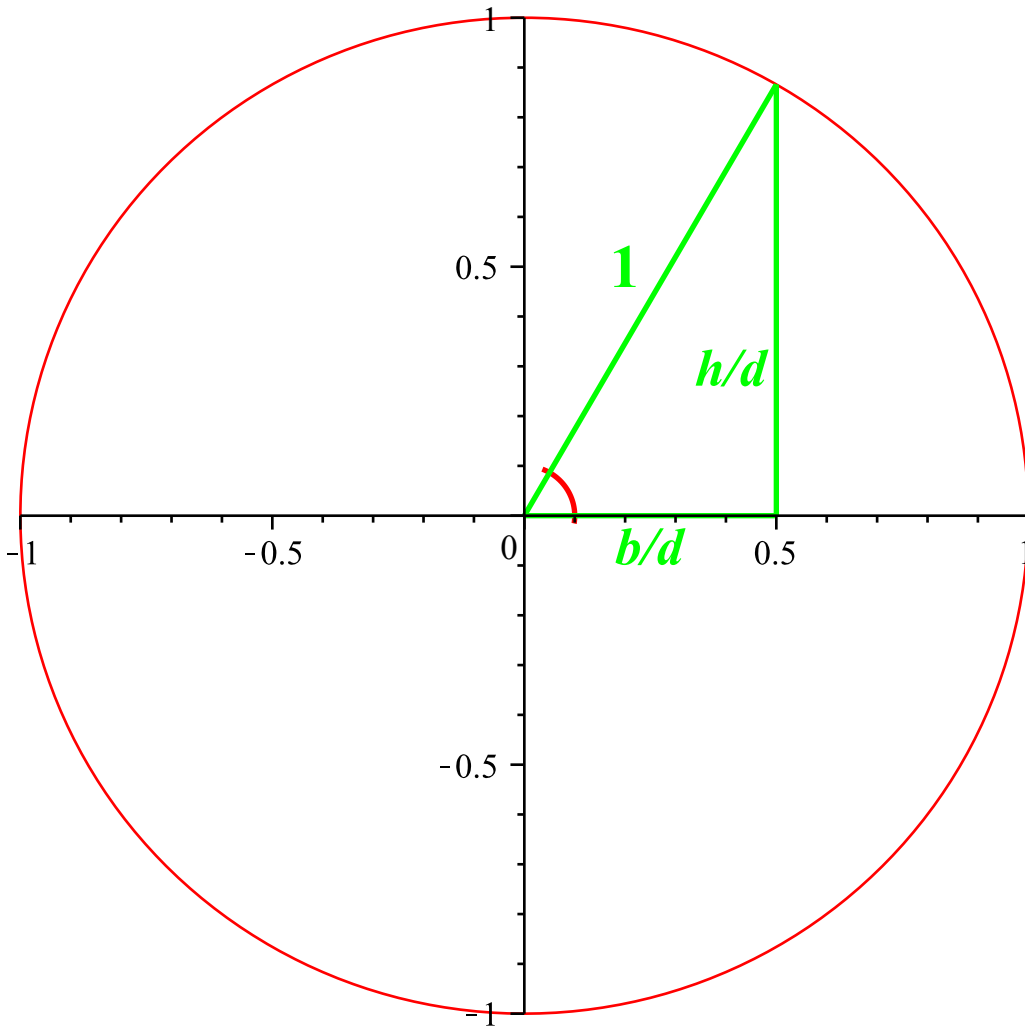


$(b, h, d) = (175, 288, 337) = \text{Nr.16}$  ;  $(11529, 16000, 19721) = \text{Nr.11a}$  :

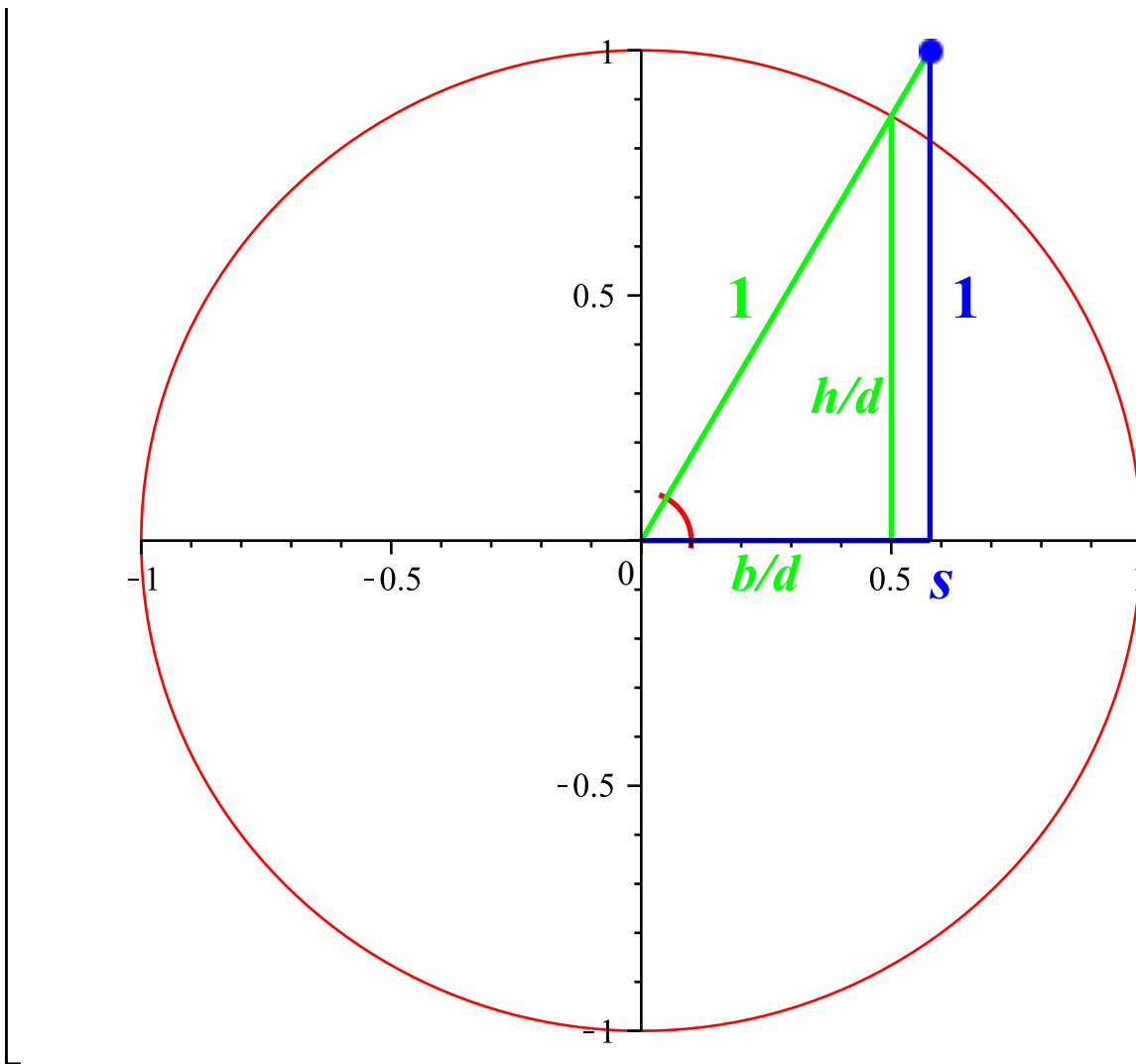
Linearisierung eines Kreisbogens (fast)

## §3. Sonnenkalender, eine mögliche (antike) Anwendung

```
> display(Stab0);
```



```
> display(Stab1);
```



Deutung: Die Quadrat-Spalte der Tontafel verbirgt eine zweite Quadratzahl  $s^2$ , wobei  $s$  die Schattenlänge eines Einheitsstabes bei Sonneneinstrahlung bezeichnet. Man braucht nur die 1 von  $\frac{d^2}{h^2}$  vor dem Komma wegzulassen, um  $s^2$  abzulesen und damit auch  $s$ . Der Strahlwinkel zur Erdoberfläche betrug zur Mittagszeit in Babylon:

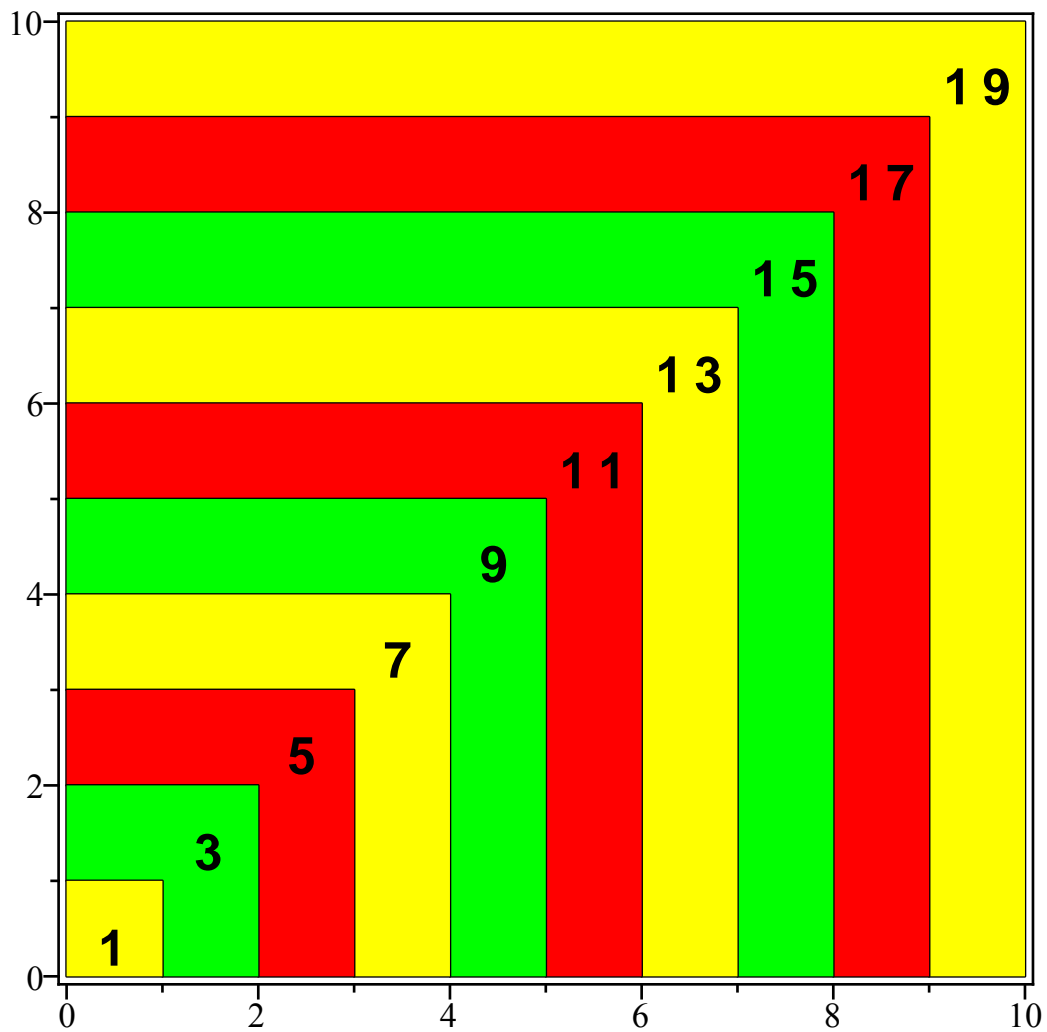
$37^\circ$  (Winteranfang),  $60^\circ$  (Frühlingsanfang),  $83^\circ$  (Sommeranfang)

Strahlensatz auf Dreiecke in Stab1 angewandt liefert in der Tat:

$$\frac{d^2}{h^2} - 1 = \frac{d^2 - h^2}{h^2} = \frac{b^2}{h^2} = \left(\frac{b}{d}\right)^2 : \left(\frac{h}{d}\right)^2 = \frac{s^2}{1} = s^2.$$

Spiel mit Wurzeln:

> `display(Odds, Stairs);`



Pythagoräer (5. Jh. v.u.Z.)

Anekdote: Kurbel-Rechenmaschine vor 50 Jahren in Numerik-Übung, für Wurzel-Algorithmus benutzt.

### Vollständige Erweiterung der Tontafel bis $83^\circ$

mit Schattenlänge  $s$  des Einheitsstabes bei Sonnenstrahlung im angegebenen Winkel:

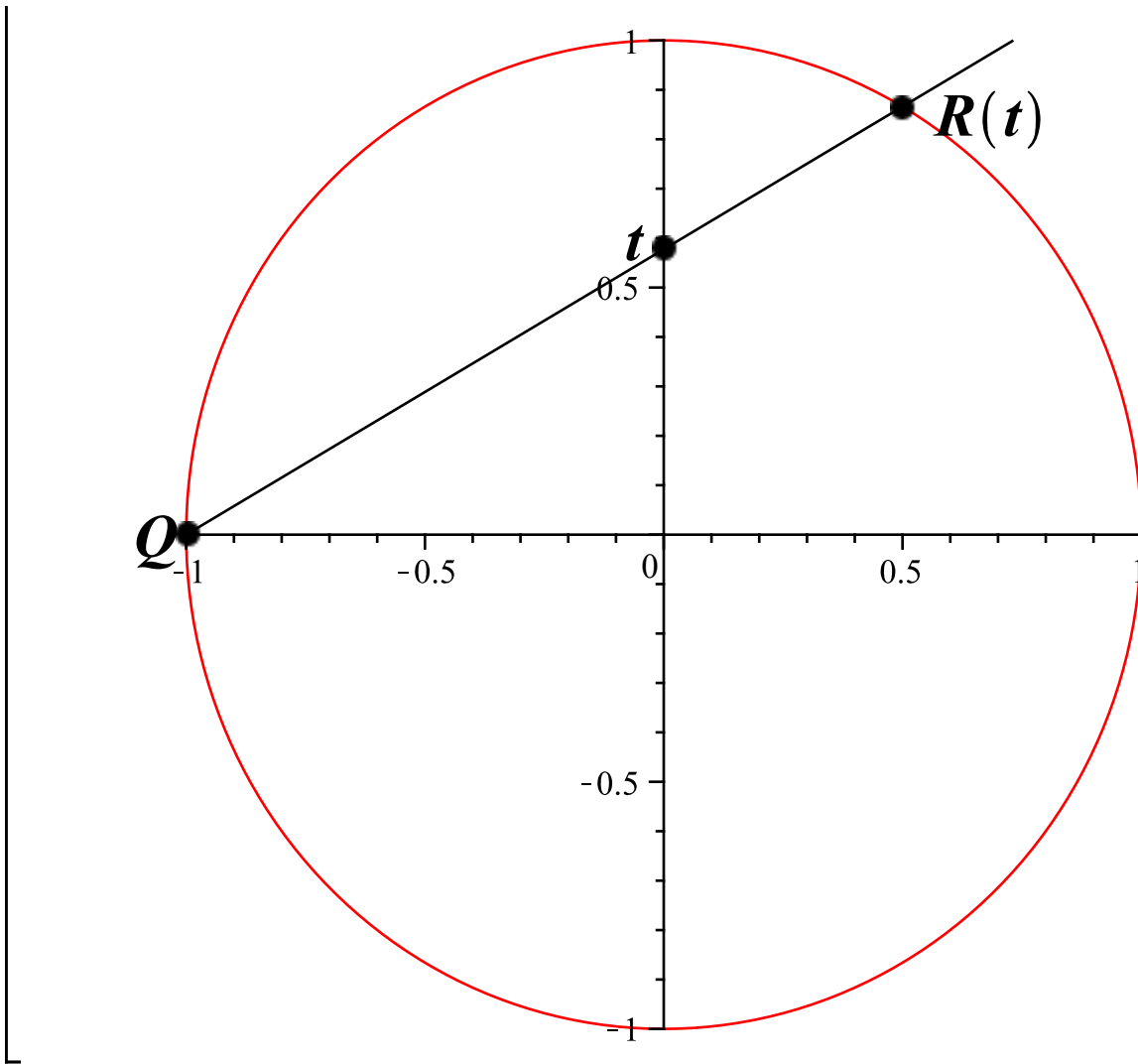


<i>Winkel</i>	<i>s</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>Breite</i>	<i>Höhe</i>	<i>Diag</i>	<i>No</i>
61.2°	0.37	(2) <sup>9</sup>	(2) (3) <sup>6</sup>	473	864	985	17
61.7°	0.36	(3) <sup>2</sup>	(5) <sup>2</sup>	8	15	17	18
63.5°	0.35	(2) <sup>3</sup> (5) <sup>4</sup>	(2) (3) <sup>8</sup>	4061	8100	9061	19
64.1°	0.33	(2) (5) <sup>2</sup>	(2) <sup>7</sup>	39	80	89	20
65.3°	0.32	(2) <sup>9</sup>	(2) (5) <sup>4</sup>	369	800	881	21
67.5°	0.29	(2) <sup>3</sup>	(2) (3) <sup>2</sup>	5	12	13	22
68.0°	0.28	(2) (3) <sup>6</sup>	(2) <sup>7</sup> (5) <sup>2</sup>	871	2160	2329	23
69.3°	0.26	(2) (5) <sup>4</sup>	(2) <sup>5</sup> (3) <sup>4</sup>	671	1800	1921	24
70.4°	0.25	(2) (3) <sup>4</sup> (5) <sup>2</sup>	(2) <sup>13</sup>	2071	5760	6121	25
70.9°	0.24	(2) <sup>11</sup>	(2) (3) <sup>4</sup> (5) <sup>2</sup>	1001	2880	3049	26
71.6°	0.23	(2) <sup>3</sup> (3) <sup>4</sup>	(2) (5) <sup>4</sup>	301	900	949	27
73.3°	0.21	(2) <sup>5</sup> (5) <sup>2</sup>	(2) (3) <sup>6</sup>	329	1080	1129	28
73.8°	0.20	(2) (3) <sup>2</sup>	(2) <sup>5</sup>	7	24	25	29
76.1°	0.18	(2) (5) <sup>4</sup>	(2) <sup>11</sup>	399	1600	1649	30
77.2°	0.16	(2) <sup>5</sup>	(2) (5) <sup>2</sup>	9	40	41	31
79.6°	0.13	(2) (5) <sup>2</sup>	(2) <sup>3</sup> (3) <sup>2</sup>	11	60	61	32
80.1°	0.12	(2) (3) <sup>6</sup>	(2) <sup>11</sup>	295	1728	1753	33
83.0°	0.084	(2) <sup>7</sup>	(2) (3) <sup>4</sup>	17	144	145	34

**Satz.** Die Tontafel Plimpton 322 enthält alle (15) rechtwinkligen Dreiecke mit regulärer Höhe < 15000 und Winkeln zwischen 45° und 60°. Zusammen mit No. 16 ist sie vollständig.

#### §4. Vergleich mit der Quadratsummen-Methode

```
> display(Proj);
```



$$R(t) = (x(t), y(t)) = \left( \frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right)$$

$$t = \frac{p}{q} \Rightarrow R(t) = (p^2 - q^2 : 2pq : p^2 + q^2) = (b : h : d)$$

h, d gegeben 0 p, q; Beispiel Nr. 4:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{PolynomialSystem}([2 \cdot p \cdot q = 13500, p^2 + q^2 = 18541], [p, q])[2] \\ \quad \{p = 125, q = 54\} \end{array} \right. \quad (1)$$

### §5 Die pythagoräische Reihe zur Erfassung primitiver pythagoräischer Dreiecke

$$\text{Pythagoräische Tripel-Reihe } \sum_d bh's \cdot q^d$$

$$0 < b < h \text{ teilerfremd, } b^2 + h^2 = d^2, \quad b, h, d \in \mathbb{N};$$

$$\text{Pythagoräische Zähl-Reihe } \sum_d \#bh's \cdot q^d$$

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{PythZählReihe: Anfang, Zwischen, Ende:} \\ \quad q^5 + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{29} + q^{37} + q^{41} + q^{53} + q^{61} + 2q^{65} + q^{73} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97} \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} q^{7001} + q^{7013} + 2q^{7025} + 2q^{7033} + 2q^{7045} + q^{7057} + q^{7069} + 2q^{7081} + 4q^{7085} + 2q^{7093} \\ + q^{7109} + q^{7121} + q^{7129} \end{array} \right] \quad (2)$$

Pythagoräische Zähl-Tabelle:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{print(PythTab)} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} N & 100 & 1000 & 10000 & 20000 \\ \text{Pyth}(N) & 16 & 158 & 1593 & 3186 \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3)$$

Pyth(N) := Anzahl der primitiven pythagoräischen Dreiecke der Hypothense  $\leq N$

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{TripelReihe PytTR : PytTR100; coeff(PyTR, } q^{7085}) \cdot q^{7085}; \\ [3, 4]q^5 + [5, 12]q^{13} + [8, 15]q^{17} + [7, 24]q^{25} + [20, 21]q^{29} + [12, 35]q^{37} + [9, 40]q^{41} \\ + [28, 45]q^{53} + [11, 60]q^{61} + ([16, 63], [33, 56])q^{65} + [48, 55]q^{73} + ([36, 77], \\ [13, 84])q^{85} + [39, 80]q^{89} + [65, 72]q^{97} \\ ([4773, 5236], [2324, 6693], [357, 7076], [3116, 6363])q^{7085} \end{array} \right] \quad (4)$$

↑ Rationale Fortsetzung der Tontafel mit modernen Mitteln ↑

Methode: Gaußsche Primzerlegung

Beispiel: Paar-Koeffizient von 7085 berechnen:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{GIfactor}(7085^2); \text{SeminormAnzahl} = \text{Sm}(7085^2); \text{PythTripel} := \text{PPs}(7085^2); \\ (1 + 2I)^2 (1 - 2I)^2 (-3 - 2I)^2 (-3 + 2I)^2 (-3 + 10I)^2 (-3 - 10I)^2 \\ \text{SeminormAnzahl} = 4 \\ \text{PythTripel} := [4773, 5236], [2324, 6693], [357, 7076], [3116, 6363] \end{array} \right] \quad (5)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > (1 + 2I)^2 \cdot (-3 - 2I)^2 \cdot (-3 + 10I)^2; \\ 4773 + 5236 I \end{array} \right] \quad (6)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > (1 + 2I)^2 \cdot (-3 - 2I)^2 \cdot (-3 - 10I)^2; \\ 6693 - 2324 I \end{array} \right] \quad (7)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > (1 + 2I)^2 \cdot (-3 + 2I)^2 \cdot (-3 - 10I)^2; \\ -6363 - 3116 I \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > (1 + 2I)^2 \cdot (-3 + 2I)^2 \cdot (-3 + 10I)^2; \\ 357 - 7076 I \end{array} \right] \quad (9)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{PPs}(65^2) \cdot q^{65} \\ ([16, 63], [33, 56])q^{65} \end{array} \right] \quad (10)$$

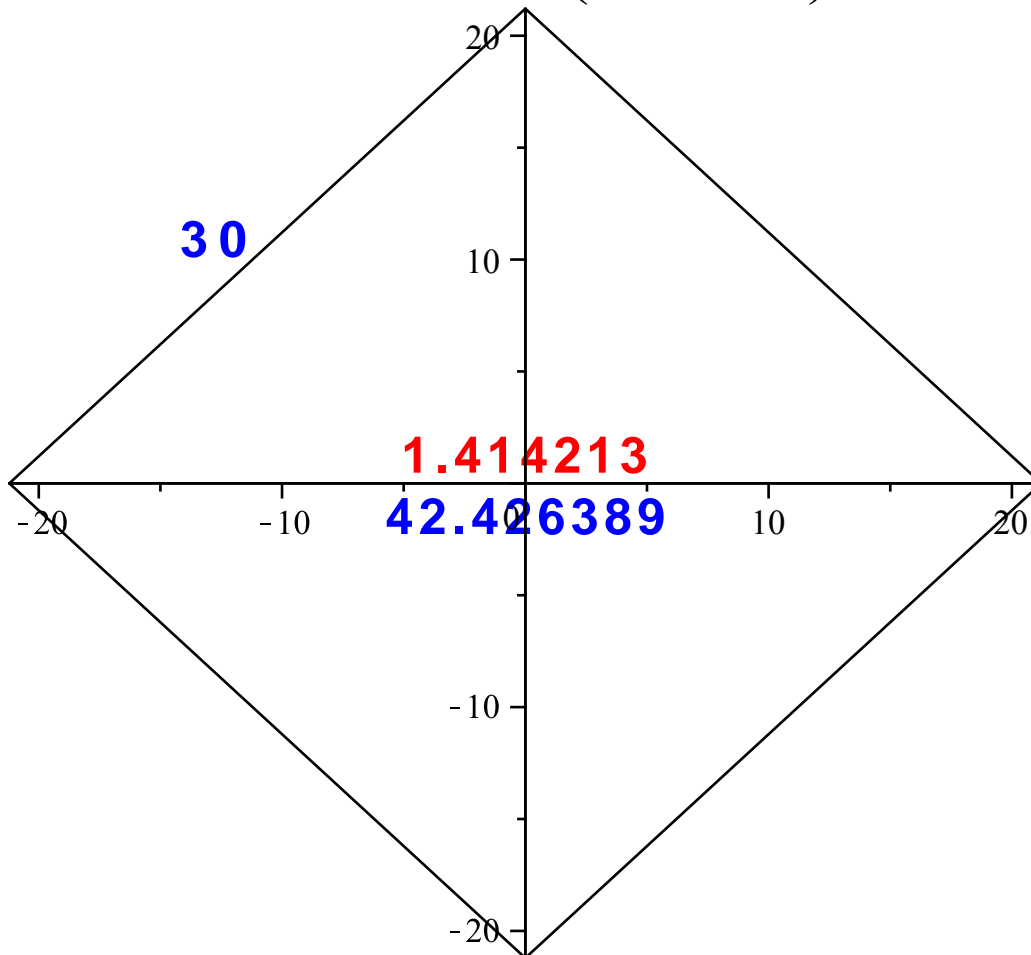
Gauß (1838): Beweis des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes. Benutzt und beweist dazu die arithmetischen Eigenschaften des Ringes  $\mathbb{Z}[i]$  (ganze Gaußsche Zahlen).

## 6. Approximation von Quadratwurzeln

5YaleTablet

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{display}(WurzelSchema) \end{array} \right]$$

# Yale Tablet (Schema)



Yale Babylon Collection 7289

$$(1.414213 \approx \sqrt{2} \approx 1 . 24 51 10)$$

6YaleTabletKeilschrift

$$\text{evalf}[7]\left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right);$$

1.414213

(11)

Theodorus von Cyrene (5. Jh. v.u.Z): Irrationalität (Incommensurabilität) von  $\sqrt{2}, \dots, \sqrt{17}$

$$\text{Harmonisches Mittel: } H := \frac{2 \cdot u \cdot v}{u + v} :$$

$$\text{Geometrisches Mittel: } G := \sqrt{u \cdot v} :$$

$$\text{Arithmetisches Mittel: } A := \frac{u + v}{2} :$$

$$u < H < \sqrt{uv} < A < v$$

Harmonisch-Arithmetische Wurzel-Näherung (Pythagoräern (5.Jh.v.u.Z) bekannt) --> Dedekind (Schnitt)

`> print(DedSch5);`

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1. & 1.3333333 & 1.4117647 & 1.4142114 & 1.4142136 \\ \surd & \surd & \surd & \surd & \surd \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \surd & \surd & \surd & \surd & \surd \\ 2. & 1.5000000 & 1.4166667 & 1.4142157 & 1.4142136 \end{array} \right] \quad (12)$$

$$\sqrt{2} = \text{evalf}[12](\sqrt{2})$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356237 \quad (13)$$

Babylonischer Spezialfall (Babyloniern vermutlich bekannt):

$$2 = v > \sqrt{2} > 1 = u :$$

$$a_1 := \frac{1}{2} \cdot \left( v + \frac{2}{u} \right) > \sqrt{2} > \frac{2}{a_1}$$

$$a_2 := \frac{1}{2} \cdot \left( a_1 + \frac{2}{a_1} \right) > \sqrt{2} > \frac{2}{a_2}$$

### §7 Jacobis Theta-Reihe und der Zwei-Quadratsummen-Satz

$$\sum_{\mathbb{D}} bh's \cdot q^{\mathbb{D}} \quad , \quad \sum_{\mathbb{D}} \#bh's \cdot q^{\mathbb{D}}$$

$\mathbb{Z}^2$  H (b,h) primitiv, auf Kreis mit Radius  $\sqrt{\mathbb{D}}$  ( $b^2 + h^2 = \mathbb{D}$ ).

Zwei-Quadrate-Satz gibt Antwort auf die Frage: Welche natürlichen Zahlen D sind Summen zweier Quadrate ?

Ergänzung: Durch wieviel verschiedene Quadratsummen wird eine gegebene Zahl D dargestellt ?

Antwort wird durch explizite Zählreihe illustriert:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{Zw}(Zählreihe, 1, 200); \text{Zw}(Zählreihe, 7050, 7150); \\ q^5 + q^{10} + q^{13} + q^{17} + q^{25} + q^{26} + q^{29} + q^{34} + q^{37} + q^{41} + q^{50} + q^{53} + q^{58} + q^{61} + 2q^{65} \\ + q^{73} + q^{74} + q^{82} + 2q^{85} + q^{89} + q^{97} + q^{101} + q^{106} + q^{109} + q^{113} + q^{122} + q^{125} + 2q^{130} \\ + q^{137} + 2q^{145} + q^{146} + q^{149} + q^{157} + q^{169} + 2q^{170} + q^{173} + q^{178} + q^{181} + 2q^{185} + q^{193} \\ + q^{194} + q^{197} \\ q^{7057} + q^{7058} + q^{7066} + q^{7069} + 2q^{7081} + q^{7082} + 4q^{7085} + 2q^{7090} + 2q^{7093} + q^{7109} + q^{7114} \\ + q^{7121} + q^{7129} + 2q^{7141} + 2q^{7145} \end{array} \right] \quad (14)$$

Durch welche Quadratsummen wird eine gegebene Zahl D dargestellt ?

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{OddBis145}; \text{EvBis146}; \\ [1, 2]q^5 + [2, 3]q^{13} + [1, 4]q^{17} + [3, 4]q^{25} + [2, 5]q^{29} + [1, 6]q^{37} + [4, 5]q^{41} + [2, \\ 7]q^{53} + [5, 6]q^{61} + ([1, 8], [4, 7])q^{65} + [3, 8]q^{73} + ([2, 9], [6, 7])q^{85} + [5, 8]q^{89} \\ + [4, 9]q^{97} + [1, 10]q^{101} + [3, 10]q^{109} + [7, 8]q^{113} + [2, 11]q^{125} + [4, 11]q^{137} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + ([1, 12], [8, 9]) q^{145} \\
& [ 3 \ 1 ] q^{10} + [ 5 \ 1 ] q^{26} + [ 5 \ 3 ] q^{34} + [ 7 \ 1 ] q^{50} + [ 7 \ 3 ] q^{58} + [ 7 \ 5 ] q^{74} \\
& + [ 9 \ 1 ] q^{82} + [ 9 \ 5 ] q^{106} + [ 11 \ 1 ] q^{122} + ([ 9 \ 7 ], [ 11 \ 3 ]) q^{130} \\
& + [ 11 \ 5 ] q^{146}
\end{aligned} \tag{15}$$

> Geordnete : *QuadratSummenGliederBis146*;

$$\begin{aligned}
& [1, 2] q^5, [ 3 \ 1 ] q^{10}, [2, 3] q^{13}, [1, 4] q^{17}, [3, 4] q^{25}, [ 5 \ 1 ] q^{26}, [2, 5] q^{29}, [ 5 \ 3 ] q^{34}, \\
& [1, 6] q^{37}, [4, 5] q^{41}, [ 7 \ 1 ] q^{50}, [2, 7] q^{53}, [ 7 \ 3 ] q^{58}, [5, 6] q^{61}, ([1, 8], [4, 7]) q^{65}, \\
& [3, 8] q^{73}, [ 7 \ 5 ] q^{74}, [ 9 \ 1 ] q^{82}, ([2, 9], [6, 7]) q^{85}, [5, 8] q^{89}, [4, 9] q^{97}, [1, \\
& 10] q^{101}, [ 9 \ 5 ] q^{106}, [3, 10] q^{109}, [7, 8] q^{113}, [ 11 \ 1 ] q^{122}, [2, 11] q^{125}, ([ 9 \ 7 ], \\
& [ 11 \ 3 ]) q^{130}, [4, 11] q^{137}, ([1, 12], [8, 9]) q^{145}, [ 11 \ 5 ] q^{146}
\end{aligned} \tag{16}$$

↑ Pythagoräische 2-Quadrate-Reihe ↑  
Fortsetzung der Tontafel mit modernen Mitteln

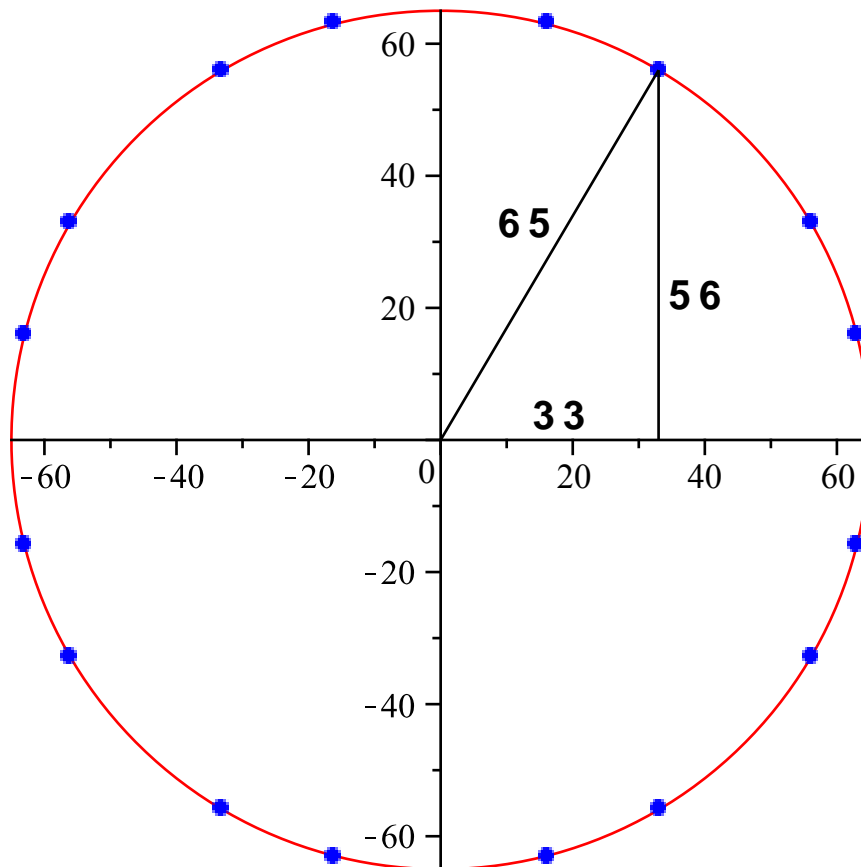
> *Glied4225*

$$([16, 63], [33, 56]) q^{4225} \tag{17}$$

Geometrisierung : *Ganzzahlige Punkte auf Kreis mit Wurzel – Radius  $d = \sqrt{D}$*   
 Beispiel  $d = 65$  ( $D = 65^2 = 4225$ )

> *display(K65, p65, Ld, Lh, Tx, Ty, Td)*

# Alle 16 primitiven ganzen Punkte auf Kreis mit Radius 65



Fermat (1607-1885) Formulierung, ohne Beweis); 2-Quadrate-Satz:

Kern: Jede Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ist Summe zweier (eindeutig bestimmter) natürlicher Quadrate.

Beweis von Euler, Arbeiten 1747/1758/1760.

J.L. Lagrange (1770): Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadraten.

G.G.C. Jacobi (1828): Explizite Formeln für Anzahl der Darstellungen, benutzt vierte Potenz von folgender Reihe:

$$\text{Jacobische Thetareihe } \vartheta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2}, q = e^{\pi i \tau}, \Im \tau > 0$$

Auch, Anzahl der Quadratsummen-Darstellungen einer natürlichen Zahl :

$$\vartheta^2 - \text{Koeffizienten von } q^N = \text{Anzahl aller } \mathbf{Z}\text{-Lösungen von } x^2 + y^2 = N$$

$$\left[ \begin{array}{l} > Z_w(\vartheta^2, 4210, 4250); \text{coeff}(\vartheta^2, q^{4225}) \\ 16 q^{4210} + 8 q^{4212} + 8 q^{4217} + 36 q^{4225} + 8 q^{4226} + 8 q^{4229} + 4 q^{4232} + 16 q^{4234} + 16 q^{4240} \\ \quad + 8 q^{4241} + 8 q^{4244} + 32 q^{4250} \end{array} \right. \quad 36 \quad (18)$$

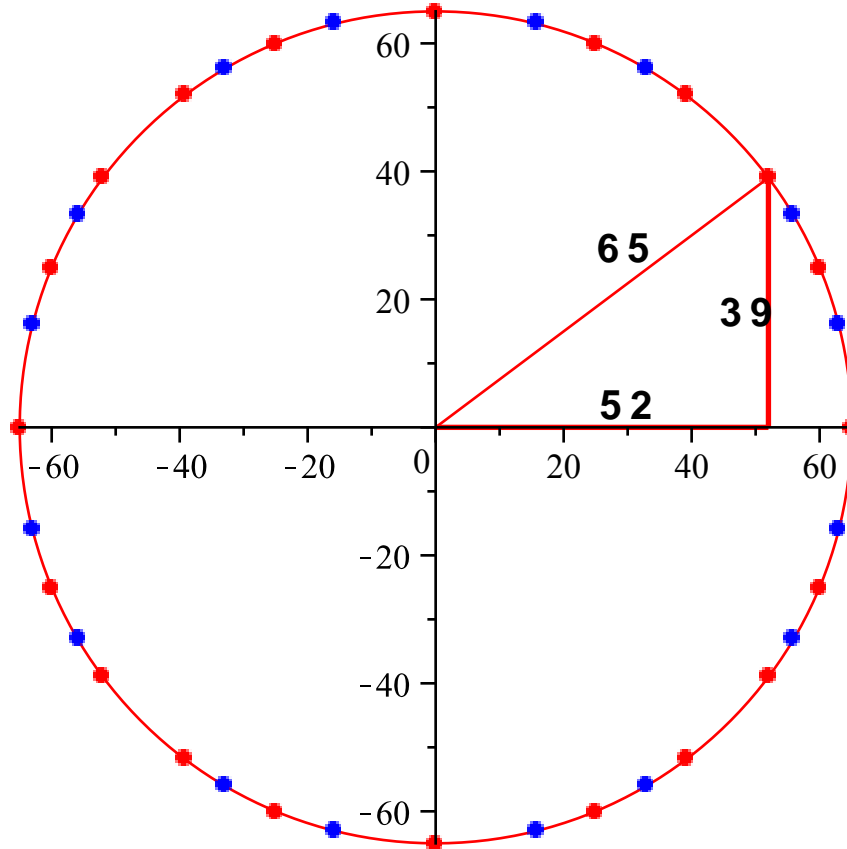
```
> nops([isolve(x^2 + y^2 = 65^2)]); isolve(x^2 + y^2 = 65^2) :  
36
```

(19)

Geometrisch: Z-Punkte auf Kreis mit Radius  $\sqrt{N}$ .

```
> display(K65, P0, P5, P13, P65, ld, lh, lb, td, tx, ty);
```

## Alle 36 ganzen Punkte auf Kreis mit Radius 65 (Norm N = 4225)



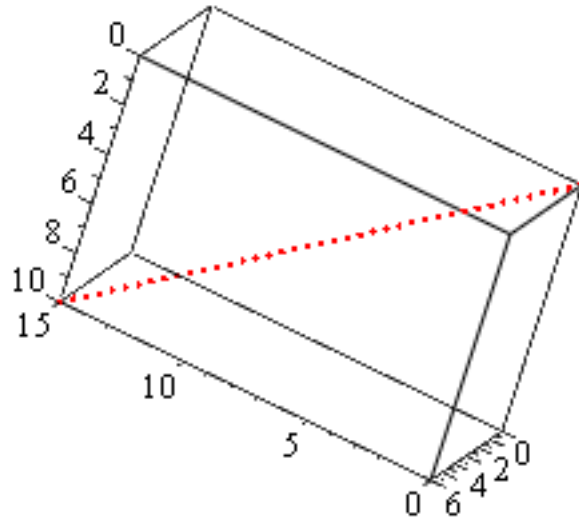
### §8 Der Drei-Quadrate-Satz und die 3-dimensionale Notebook-Version der Tontafel

Pythagoräische Quader :Ganzzahlige Diagonale und Seiten

```
> display(Quader)
```

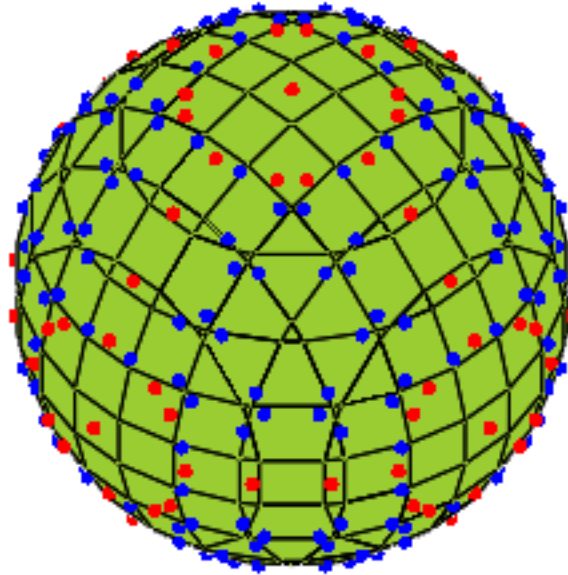


**Quader mit Seiten: 6,10,15; Diagonale  
=19**



> *print(B65)*

# Z-Punkte auf Ball mit Radius 65



$$x^2 + y^2 + z^2 = 65^2 \quad (=4225)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > Zw(\vartheta^3, 4225, 4225) \\ & 390 q^{4225} \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\begin{array}{l} Zw(\vartheta^3, 4220, 4230) \\ 960 q^{4221} + 288 q^{4222} + 96 q^{4224} + 390 q^{4225} + 1248 q^{4226} + 240 q^{4227} + 192 q^{4228} + 936 q^{4229} \\ + 720 q^{4230} \end{array} \quad (21)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > Tripelreihe : [1, 2, 2] q^3 + [2, 3, 6] q^7 + [1, 4, 8] q^9 + [4, 4, 7] q^9 + [6, 6, 7] q^{11} + [2, 6, \\ 9] q^{11} + [3, 4, 12] q^{13} + [2, 10, 11] q^{15} + [2, 5, 14] q^{15} + [1, 12, 12] q^{17} + [8, 9, 12] q^{17} \\ + [6, 10, 15] q^{19} + [1, 6, 18] q^{19} + [6, 6, 17] q^{19} : \end{array} \right.$$

↑ Pythagoräische 3-Quadrate-Reihe: ↑

3-dimensionale Fortsetzung der Tontafel mit modernen Mitteln

$$\left[ \begin{array}{l} > Tripelreihe65; \\ [15, 36, 52] q^{65} + [25, 36, 48] q^{65} + [20, 39, 48] q^{65} + [7, 24, 60] q^{65} + [20, 24, 57] q^{65} \end{array} \right. \quad (22)$$

**Drei-Quadrate-Satz.** Eine natürliche Zahl  $n > 0$  ist genau dann als Summe von drei Quadraten natürlicher Zahlen darstellbar, wenn

$$n = 4^k \cdot m, \text{ mit } m \equiv 1, 2 \text{ oder } 3 \pmod{4}, \text{ aber } \not\equiv 7 \pmod{8}.$$

Lagrange und Gauss haben die Begriffe (äquivalent, definit, indefinit, reduziert usw.) der Eigenschaften von quadratischen Formen eingeführt und viele Sätze in diesem Bereich bewiesen. Als Ergebnis dieser Leistungen war der Beweis des Drei-Quadrate-Satzes von Legendre 1798, der eine Ungenauigkeit enthielt. Diese wurde später von Gauß beseitigt.

**§9 Ausblick:  
Weiterreise in die nichteuklidische vierdimensionale Kugel  
zu Picard, Hecke, Hirzebruch und Klassenzahlen komplexer Kurven**

$$\text{FormaleHeckeReihe: } \sum_N \left( (1 - 12 \cdot N) \cdot k_N + \sum_{m=0}^N (16 - (-1)^m \cdot 40) \cdot k_{N-m} \cdot \sigma(m) \right) \cdot q^N :$$

Kreispunktzahlen  $k_N = \# \mathbb{Z}$ -Lösungen  $(x^2 + y^2 = N)$

Ballpunktzahlen  $\theta_N = \# \mathbb{Z}$ -Lösungen von  $x^2 + y^2 + z^2 = N$ ):

FJR = FormaleJacobiReihe:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{FJR;} \\ 1 + 2 \theta_1 q + (\theta_1^2 + 2 \theta_2) q^2 + (2 \theta_3 + 2 \theta_1 \theta_2) q^3 + (\theta_2^2 + 2 \theta_4 + 2 \theta_1 \theta_3) q^4 + (2 \theta_2 \theta_3 \\ \quad + 2 \theta_1 \theta_4 + 2 \theta_5) q^5 + (\theta_3^2 + 2 \theta_6 + 2 \theta_1 \theta_5 + 2 \theta_2 \theta_4) q^6 + (2 \theta_1 \theta_6 + 2 \theta_3 \theta_4 + 2 \theta_7 \\ \quad + 2 \theta_2 \theta_5) q^7 + (2 \theta_2 \theta_6 + 2 \theta_1 \theta_7 + 2 \theta_3 \theta_5 + 2 \theta_8 + \theta_4^2) q^8 + (2 \theta_4 \theta_5 + 2 \theta_3 \theta_6 + 2 \theta_9 \\ \quad + 2 \theta_2 \theta_7 + 2 \theta_1 \theta_8) q^9 + (2 \theta_4 \theta_6 + 2 \theta_1 \theta_9 + 2 \theta_{10} + \theta_5^2 + 2 \theta_2 \theta_8 + 2 \theta_3 \theta_7) q^{10} \end{array} \right. \quad (23)$$

Punktzahlen  $k_m$  bzw.  $\theta_n$  einsetzen, Übereinstimmung der Reihen:

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{HeckeReihe;} \\ 1 + 12 q + 60 q^2 + 160 q^3 + 252 q^4 + 312 q^5 + 544 q^6 + 960 q^7 + 1020 q^8 + 876 q^9 \\ \quad + 1560 q^{10} \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{JacobiReihe;} \\ 1 + 12 q + 60 q^2 + 160 q^3 + 252 q^4 + 312 q^5 + 544 q^6 + 960 q^7 + 1020 q^8 + 876 q^9 \\ \quad + 1560 q^{10} \end{array} \right. \quad (25)$$

→ Explizite überraschende Relationen zwischen Kreispunktzahlen  $k_m$  und Ballpunktzahlen  $\theta_n$

Beweis der Übereinstimmung erfordert ein Semester Spezialvorlesung mit Mitteln des 20. Jahrhunderts: Mit Picard, Hecke, Hirzebruch u.a. auf die nichteuklidische 4-dimensionale Kugel.

**§10 Lauras Vase,  
Empfehlung zur Langen Nacht der Wissenschaften**

$$\left[ \begin{array}{l} > \text{display}(Vase) \end{array} \right.$$



Laura (12 Jahre) hat sie selbst digital gedreht (mit "rotate") und gefärbt, nachdem ich ihr die Konturkurve interpoliert hatte. Anschließend hat sie auch noch mit Maus und Zubehör "paint" die Vase künstlerisch bemalt/beschriftet, siehe Foto-Galerie (Homepage, Facebook):  
8VaseBemalt

### Literatur

- Abdulrahman A. Abdulaziz, The Plimpton 322 Tablet and the Babylonian Method of Generating Pythagorean Triples, "arXiv:1004.0025 v1 [math.HO] 31 Mar 2010", Google
- Baranouskaya, Volha, Summe von Quadraten und die Anzahl ihrer Darstellungen, Google
- Busam, R., Freitag, E., Funktionentheorie, Kap. VI,VII, Springer, 1993
- Ebbinghaus, H.-D., and others, Numbers, Springer, 1991
- Ecklin, Sabine, Zählen ? Messen ? Wägen: Rechnen vor 4000 Jahren, Google
- Erath, Christoph, Babylonische Mathematik mit Schwerpunkten aus der Zahlentheorie, Google
- Forster, Otto, Der Drei-Quadrate-Satz von Gauß, Google
- Neugebauer, O., Sachs, A., Mathematical cuneiform texts, American Oriental Series, Vol. 29, Neumann, Olaf, Leonhard Euler und die Zahlen, Univ. Braunschweig, März 2008, Preprint
- New Haven, 1945
- Pieper, Herbert, HEUREKA Ich hab's gefunden, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988

Zagier, Don, Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981