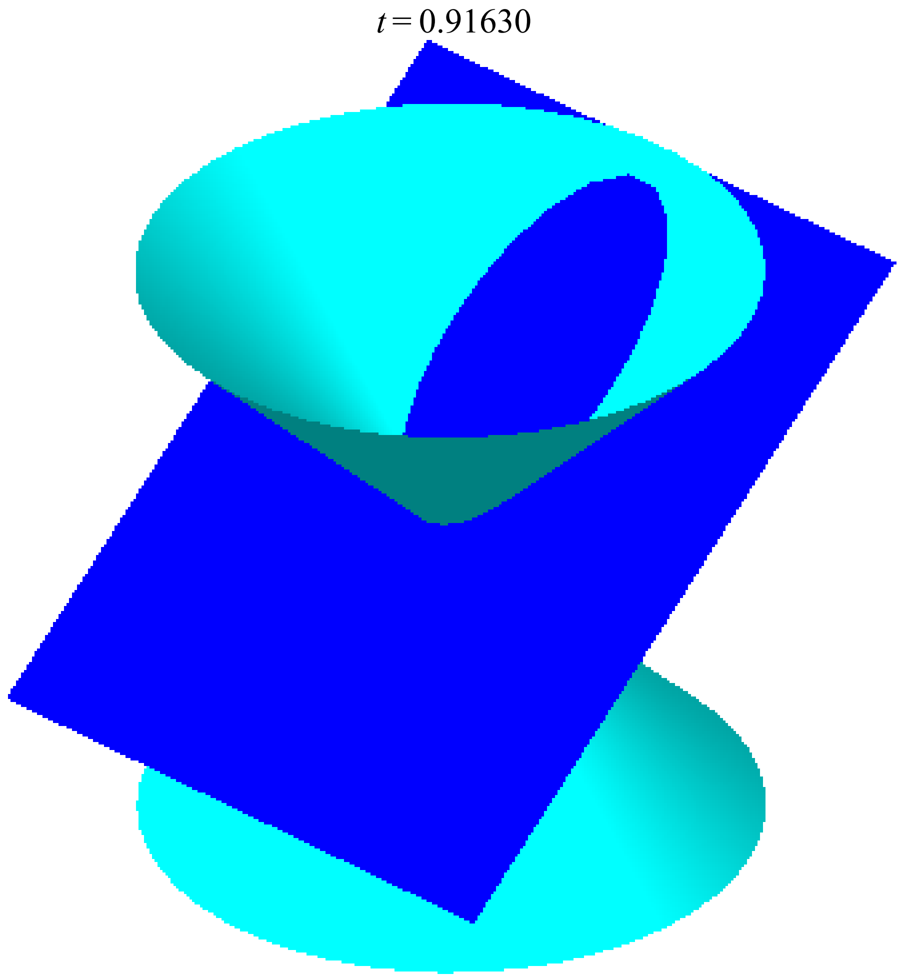
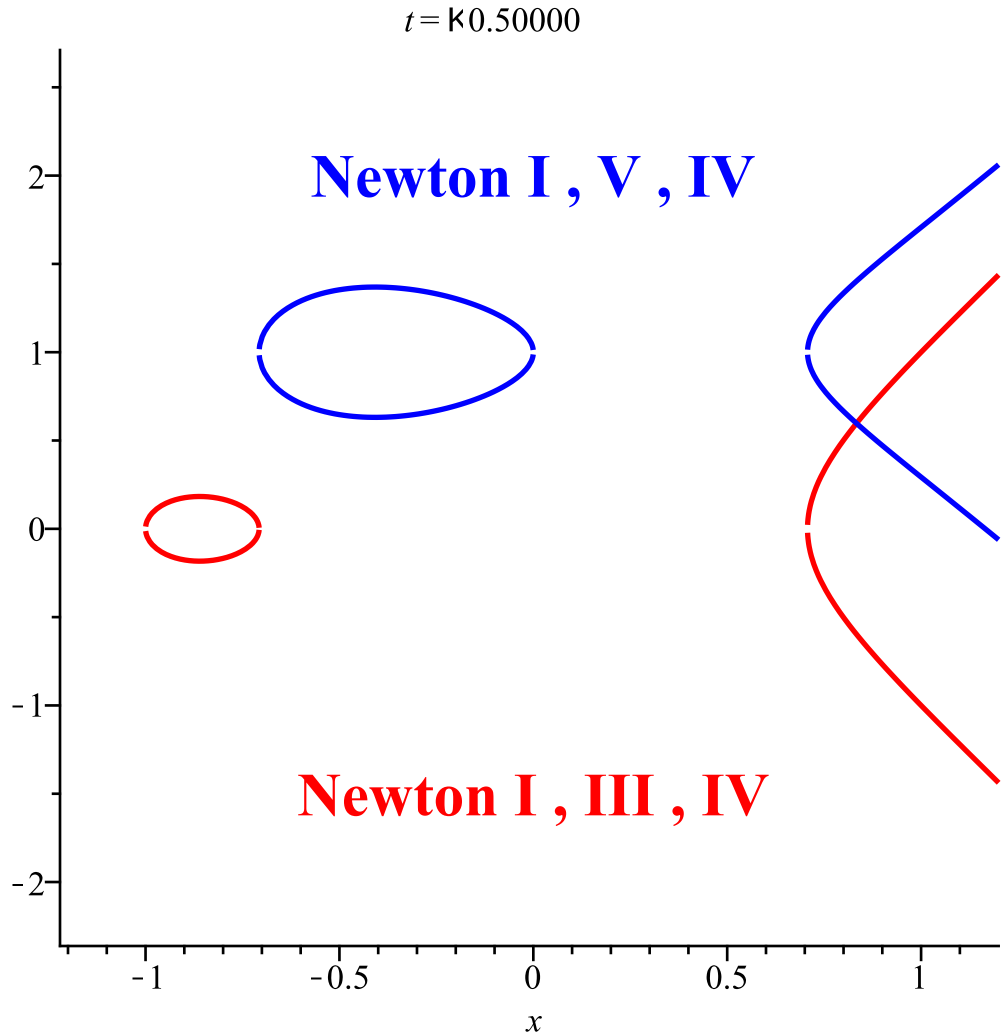
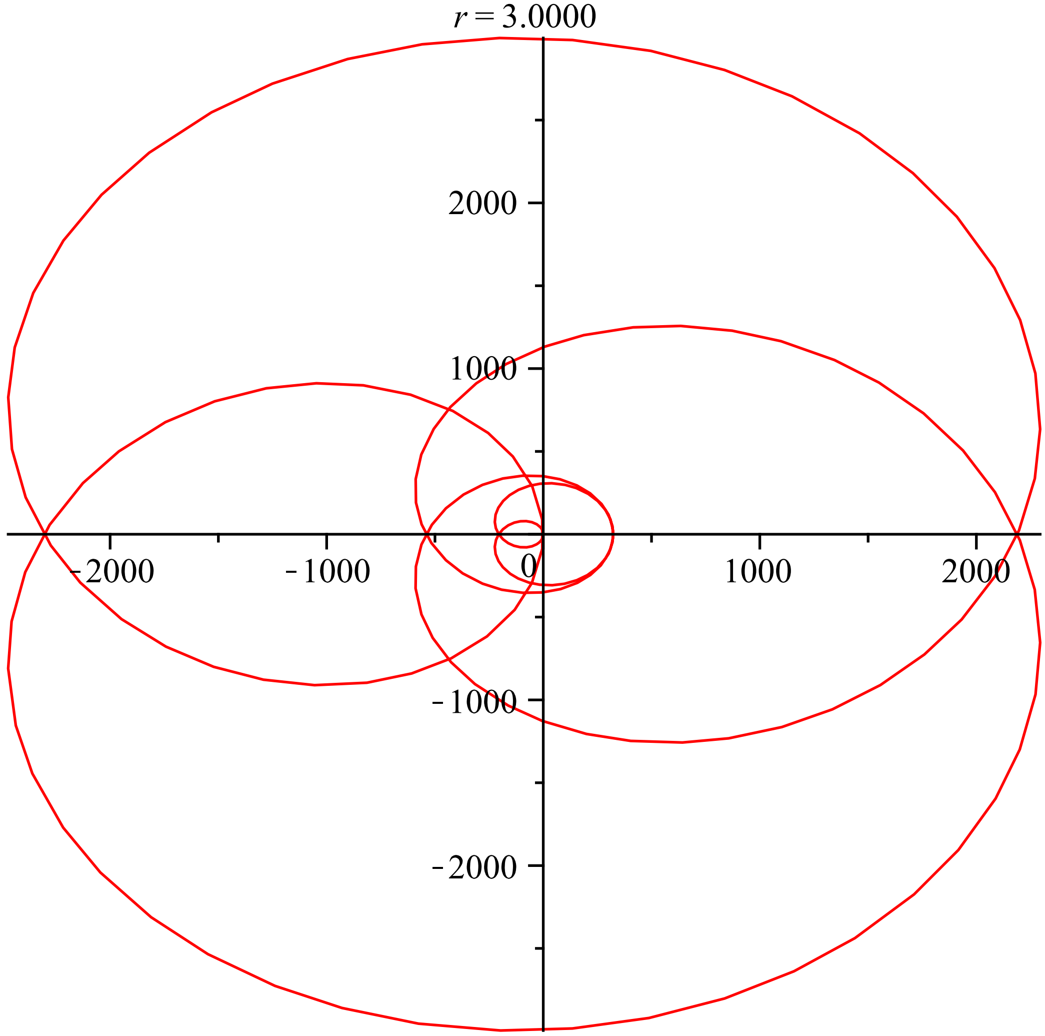


Animation A1: Kegelschnitte

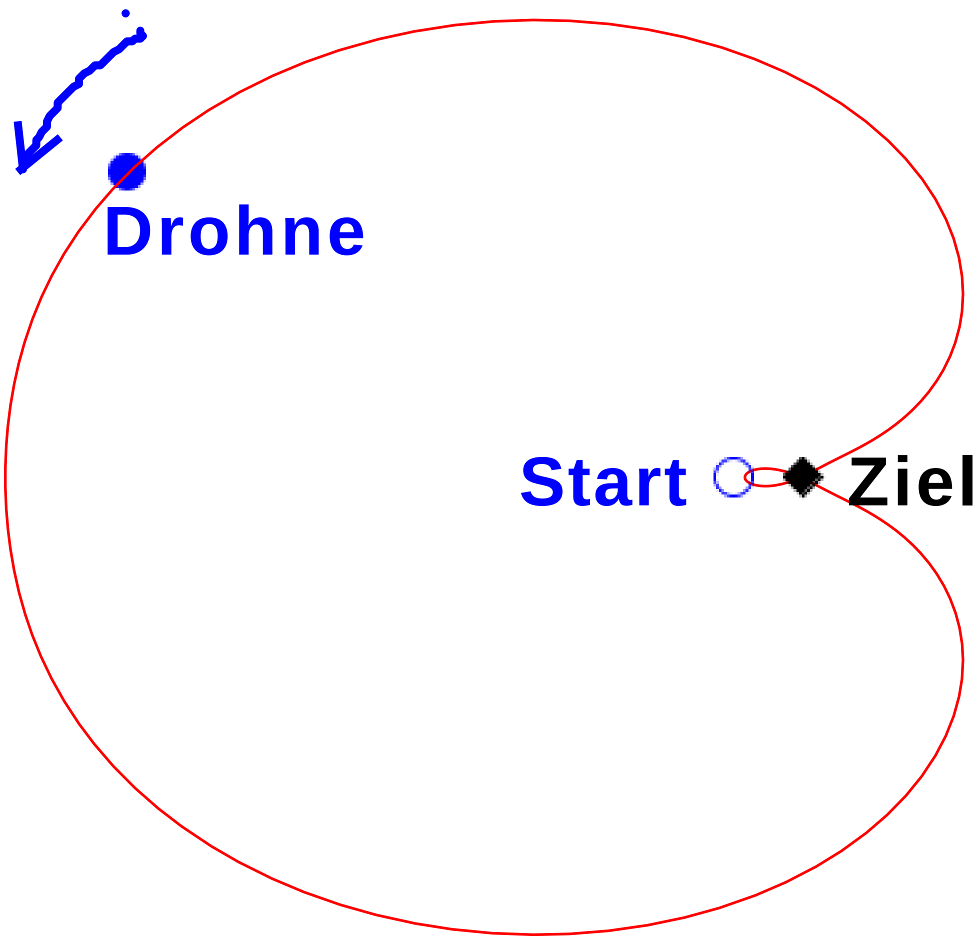


A2 Newtonsche kubische Kurven
(die singulären Typen III,V tauchen in der Animation auf)



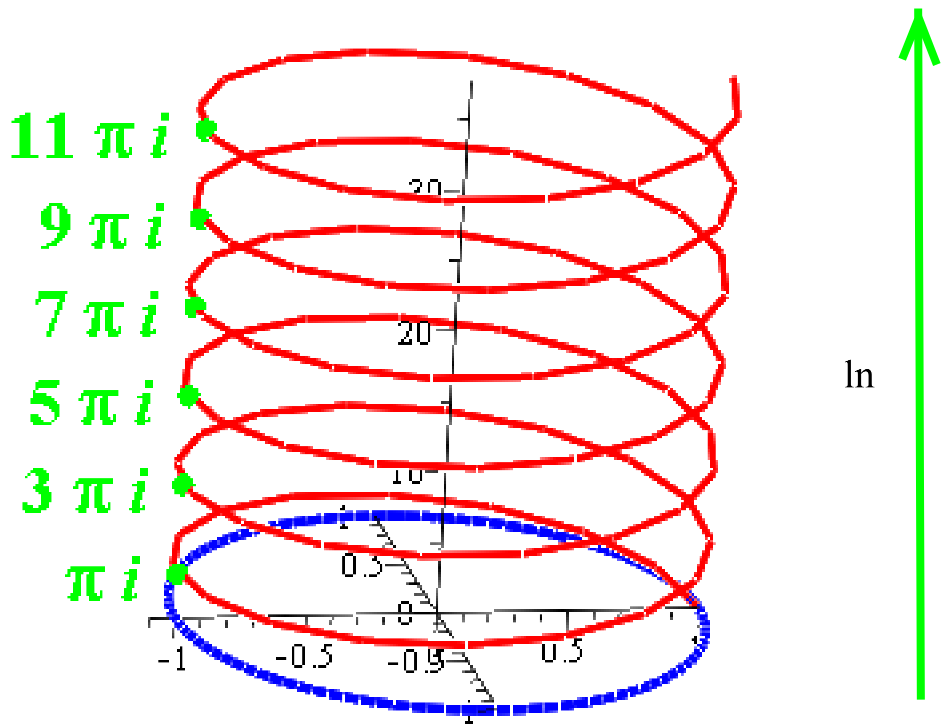
A3 Radius-Welle, eingefroren bei r=3000

4 = 2.6928



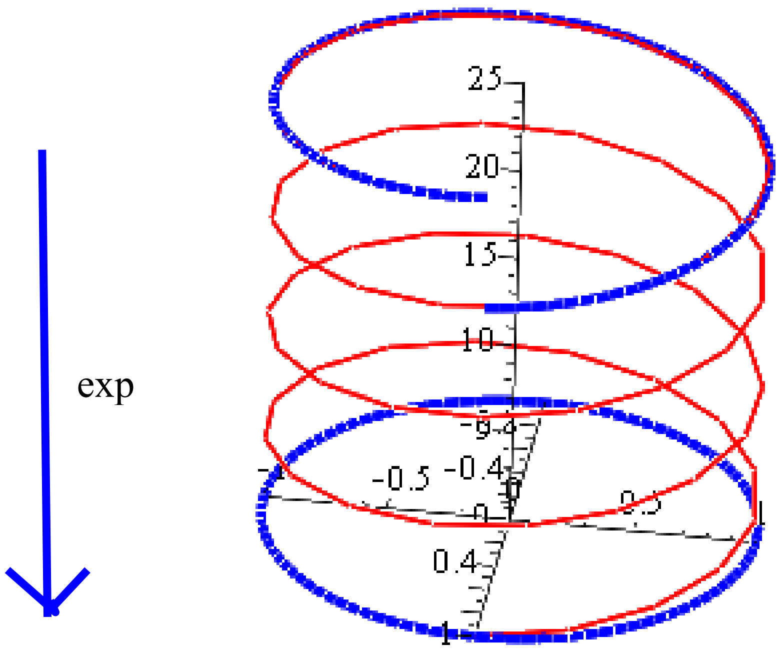
A4 Nullstellen-Drohne

Komplexer Logarithmus



A5 Logarithmus-Spirale

Fundamental-Bogen der Exponentialabbildung, eingeschränkt auf die zur Spirale gedrehten imaginären Geraden



A6 Fundamentalbogen = 1 Windung

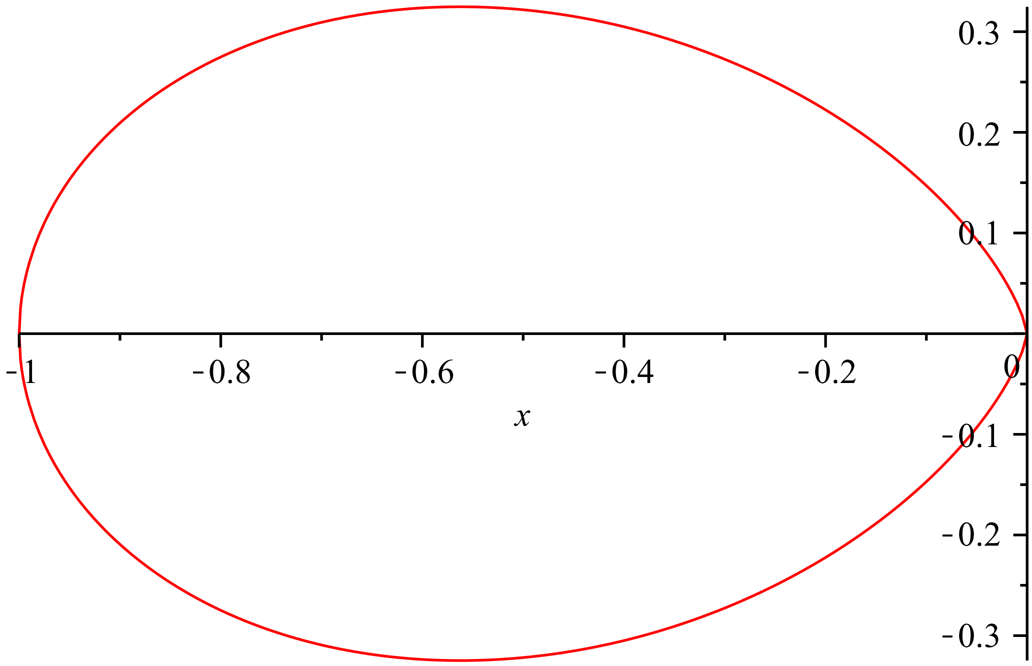
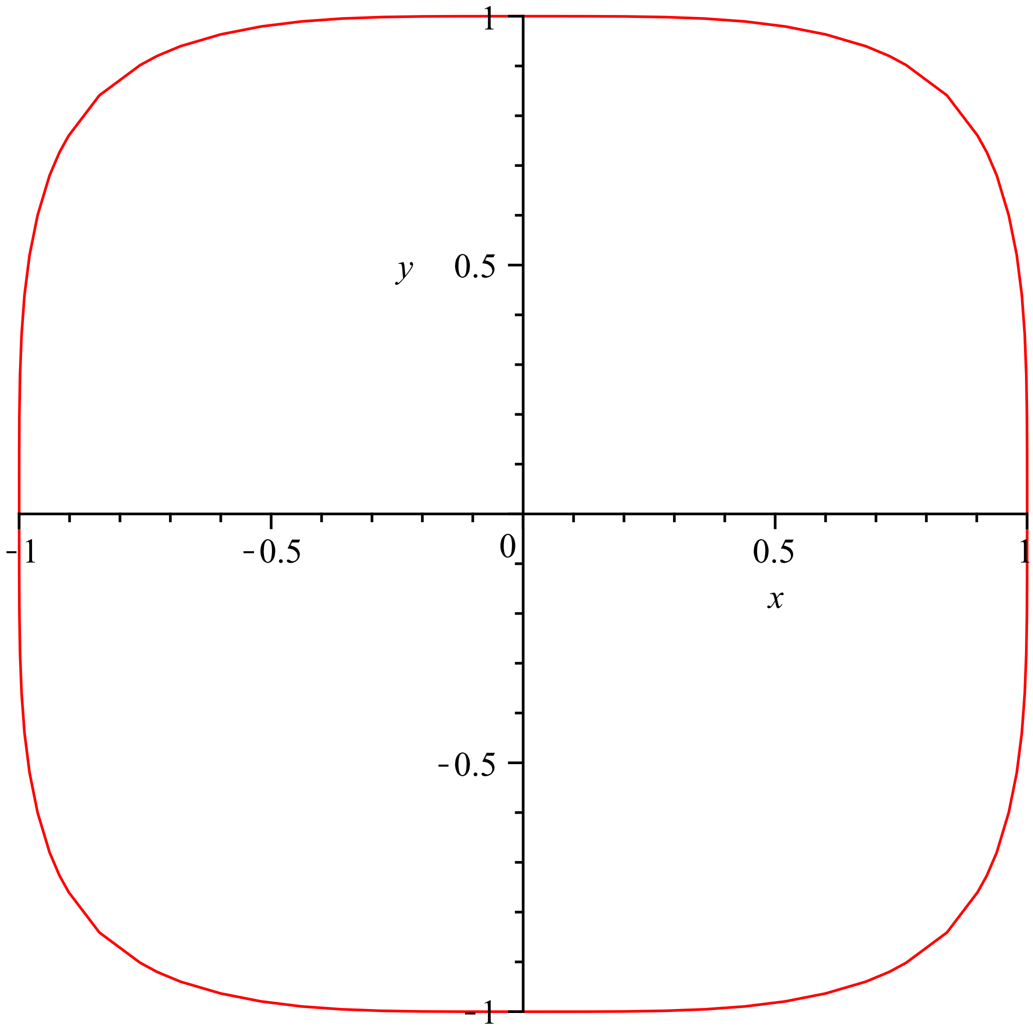
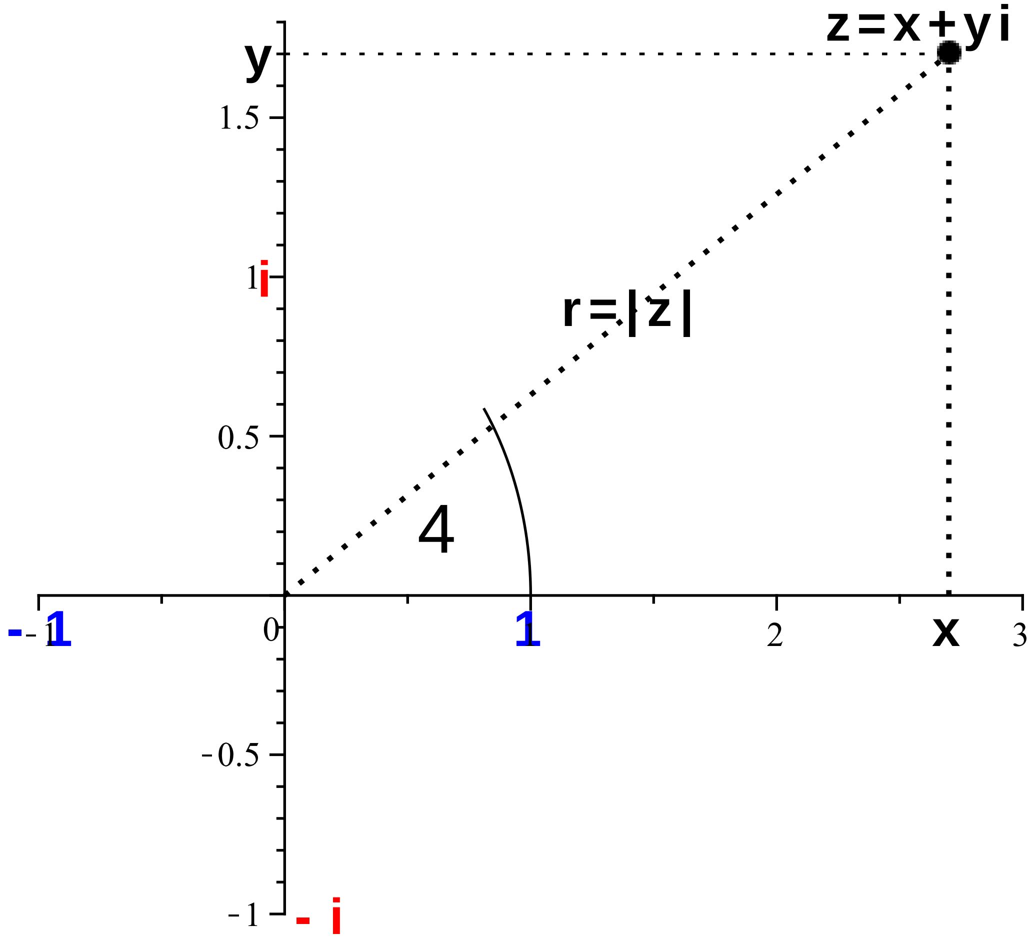


Bild B1: Ovoid

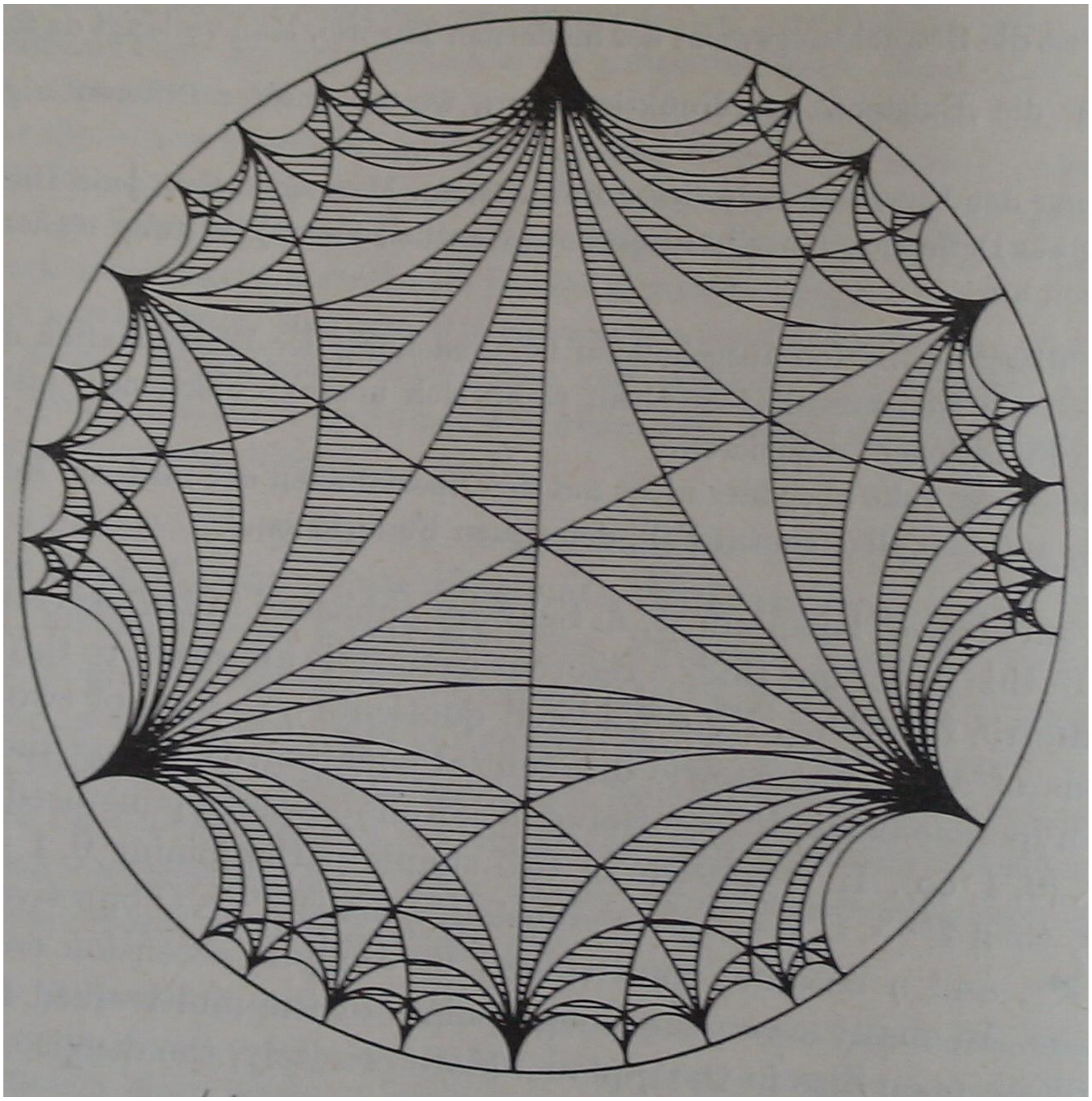


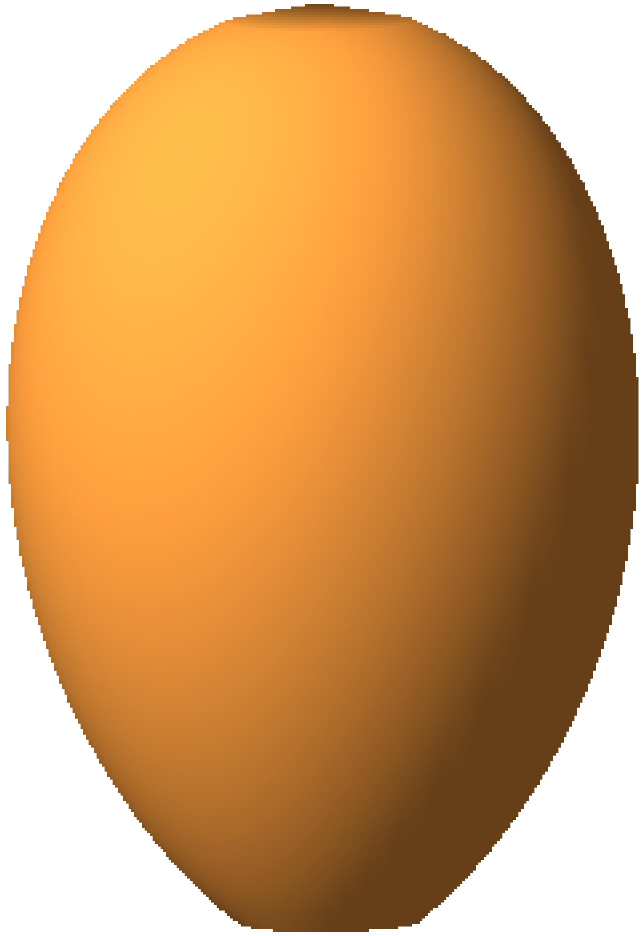
B2 Fermat-Kurve 4. Grades

Gaußsche Zahlenebene

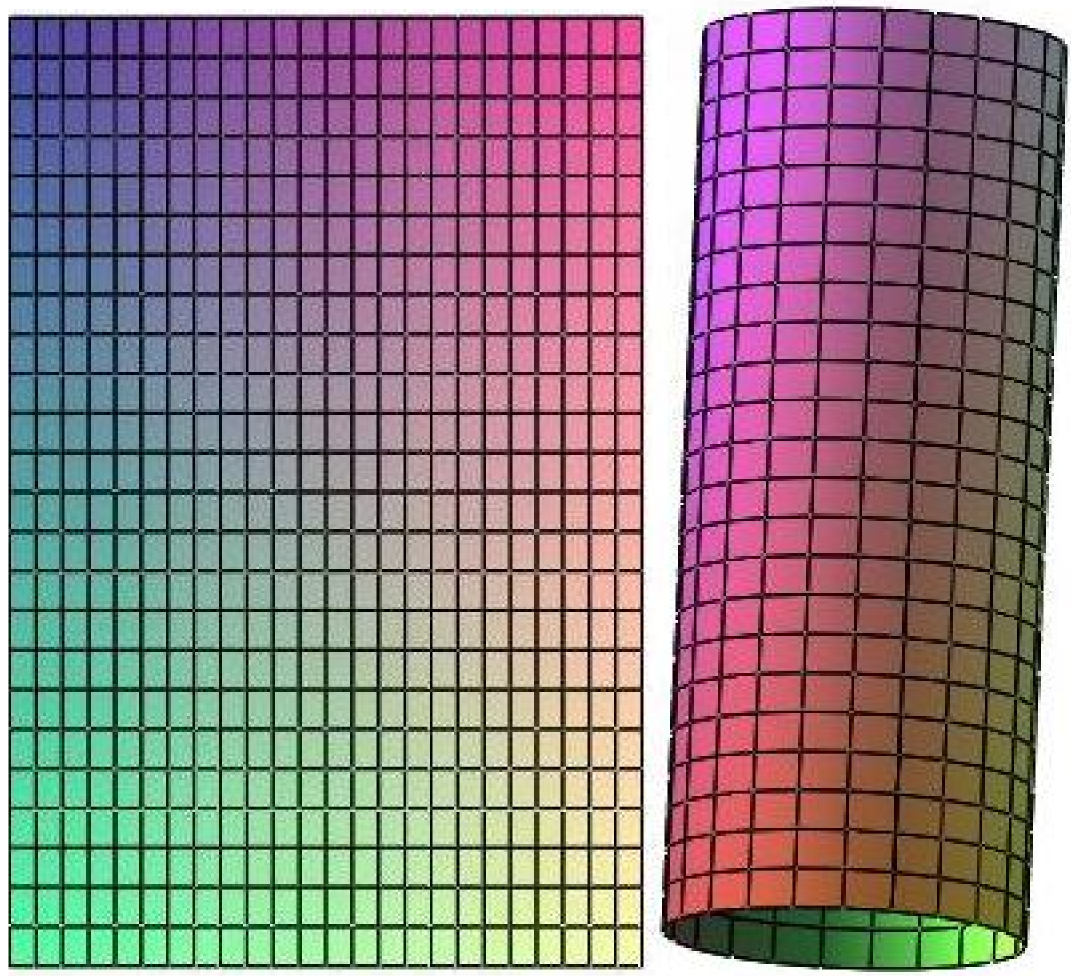


B3 Polarkoordinaten

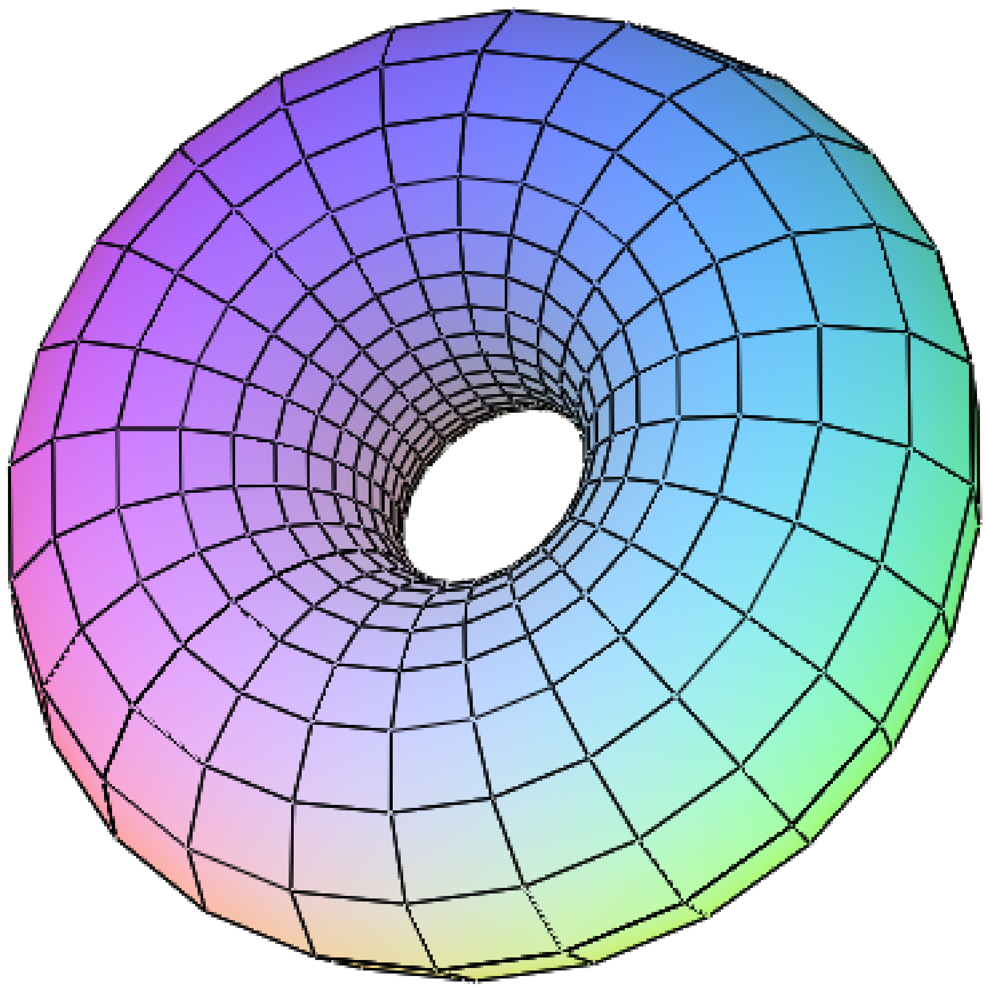

B4 Nichteuklidisch (unendlich) triangulierter Kreis



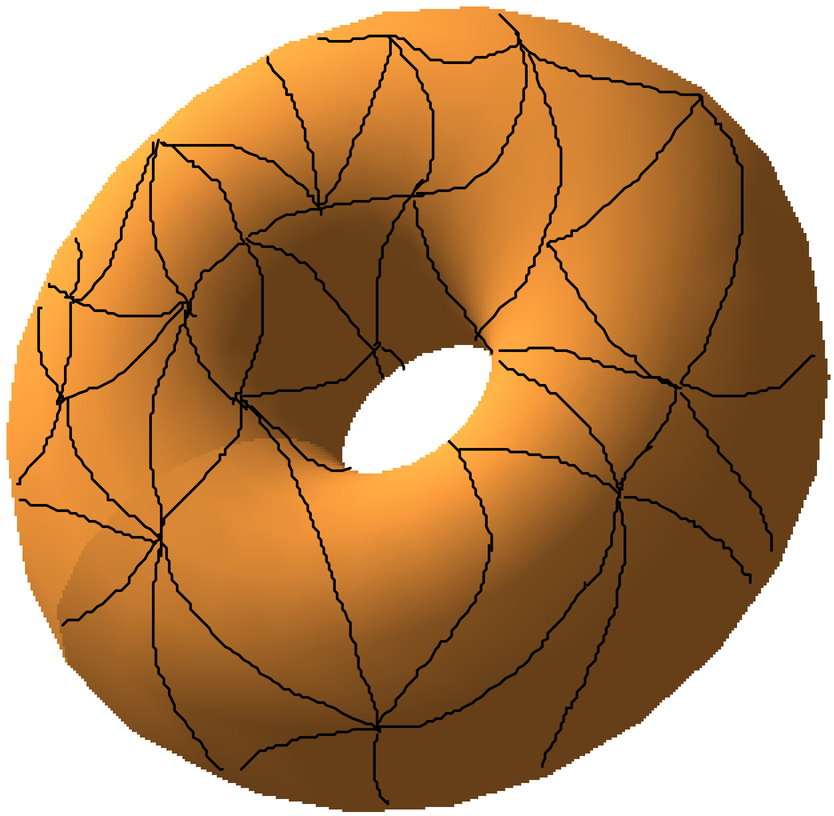
Dynamisches Raumbild D1: Ei des Kolumbus



D2 Rechteck →Zylinder→



D3 Torus



D4 Triangulierter Torus

f) ist einer Ebene der Lage c) parallel; das Schnittgebilde ist eine Kurve, welche nur über einen Kegel, nicht über seinen Scheitelkegel sich erstreckt, welche dem Kegelscheitel gegenüber eine konvexe Form zeigt, und nach der Öffnung des Kegels hin offen und zweischenklig sich ins Unendliche erstreckt; dies Schnittgebilde wird als Parabel bezeichnet.

§ 63. Die Ellipse als Kegelschnitt.

In einen Kegel vom Scheitel S sind zwei sich gegenseitig weder schneidende noch berührende Kugeln von den Mittelpunkten X_1 und X_2 einbeschrieben. An beide Kugeln ist eine beliebige, zwischen denselben verlaufende Tangentialebene gelegt, welche den Kegelmantel in einer Ellipse schneidet (vgl. § 62, II, d). Man betrachte denjenigen Achsenschnitt des Kegels, der auf der Tangentialebene der beiden Kugeln senkrecht steht und mache ihn zur Ebene der Zeichnung (Fig. 117)*). Er schneidet den Kegel längs der Seitenlinien $SABC$ und $SDEF$, und die Kugeln in zwei gröfsten Kreisen; er schneidet die Tangentialebene der Kugeln in der Geraden BE und die Ebenen der Berührungskreise zwischen dem Kegel und den Kugeln in AD und CF. Er enthält die Berührungspunkte G und H der Kugeln mit ihrer Tangentialebene. G und H heifsen Brennpunkte der Ellipse. — Die Strecke BC wird die Hauptachse der Ellipse genannt und mit 2a bezeichnet; die Strecke GH heifst die Exzentrizität der Ellipse und wir gleich 2e gesetzt.

Weil die Ebene der Ellipse auf dem Achsenschnitt senkrecht steht, und der Achsenschnitt eine Symmetrieebene des Kegels ist, ist die Hauptachse der Ellipse eine Symmetriegerade derselben. Die Ebene der Ellipse schneidet die Ebenen der Berührungskreise des Kegels mit den Kugeln in zwei Geraden JK und LM, die auf der

*) Der in der Figur gezeichnete Achsenschnitt des Kegels ist nicht mit den in der Figur weggelassenen Linien zu verwechseln, welche die Grenzen der dem Beschauer sichtbaren Kegelteile angeben würden.

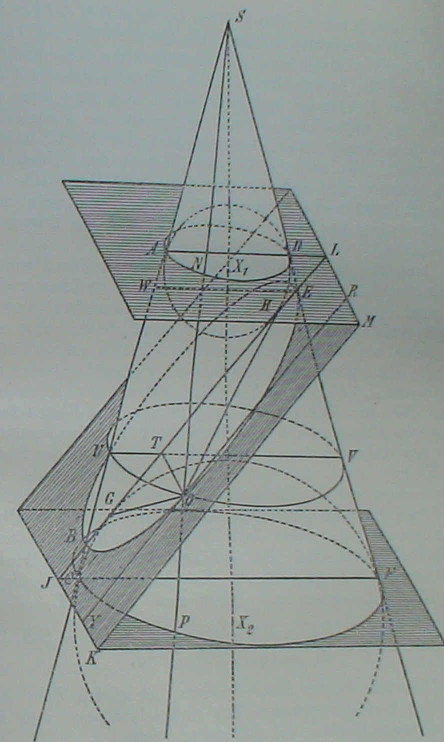
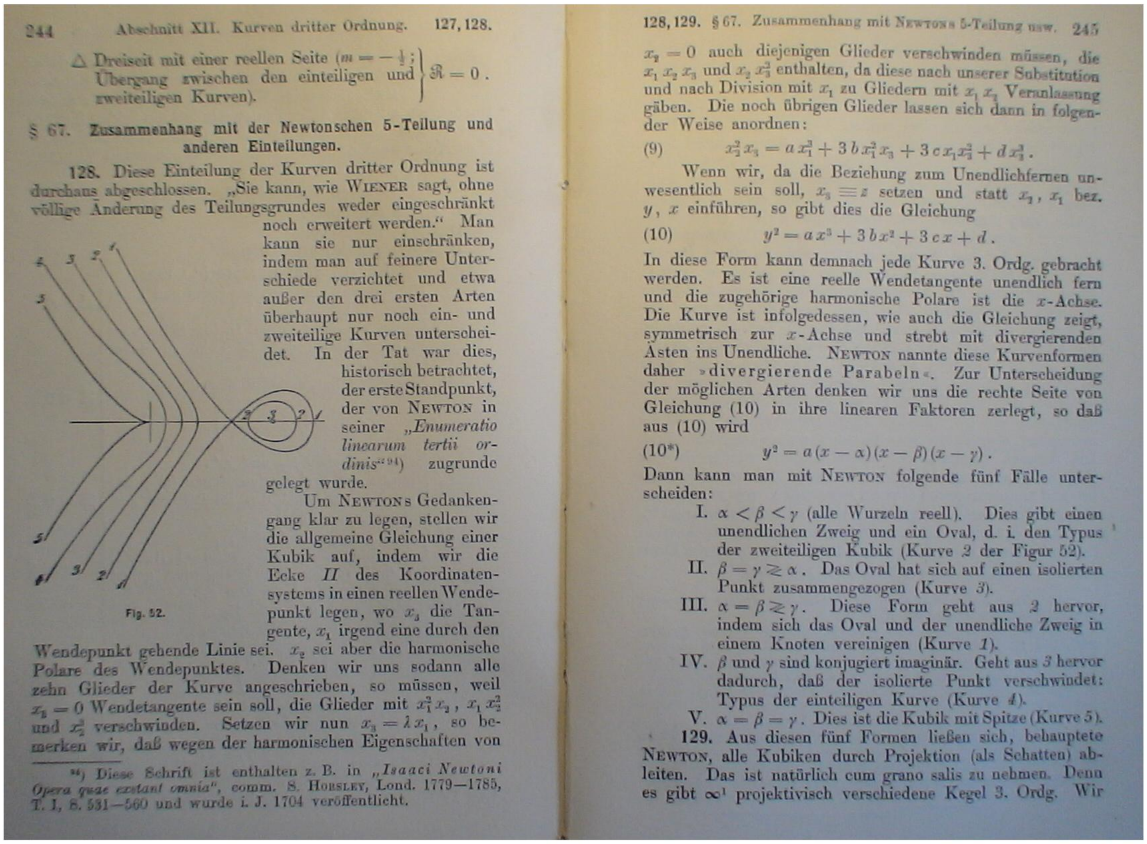


Fig. 117.

Zeichnungsebene in J und L, mithin auch auf der Geraden JL senkrecht stehen.

JK und LM sind die Leitlinien der Ellipse. Der beliebige Punkt O der Ellipse wird mit dem Brennpunkt H

Faksimile F1: Dandelinsche Kugeln



$\triangle$ Dreiseit mit einer reellen Seite ($m = -\frac{1}{2}$; Übergang zwischen den einteiligen und zweiteiligen Kurven). $\Big\} \ \mathfrak{R} = 0$.

§ 67. Zusammenhang mit der Newtonschen 5-Teilung und anderen Einteilungen.

128. Diese Einteilung der Kurven dritter Ordnung ist durchaus abgeschlossen. „Sie kann, wie WIENER sagt, ohne völlige Änderung des Teilungsgrundes weder eingeschränkt noch erweitert werden." Man kann sie nur einschränken, indem man auf feinere Unterschiede verzichtet und etwa außer den drei ersten Arten überhaupt nur noch ein- und zweiteilige Kurven unterscheidet. In der Tat war dies, historisch betrachtet, der erste Standpunkt, der von NEWTON in seiner „*Enumeratio linearum tertii ordinis*"[94]) zugrunde gelegt wurde.

Fig. 52.

Um NEWTONs Gedankengang klar zu legen, stellen wir die allgemeine Gleichung einer Kubik auf, indem wir die Ecke *II* des Koordinatensystems in einen reellen Wendepunkt legen, wo x_3 die Tangente, x_1 irgend eine durch den Wendepunkt gehende Linie sei. x_2 sei aber die harmonische Polare des Wendepunktes. Denken wir uns sodann alle zehn Glieder der Kurve angeschrieben, so müssen, weil $x_3 = 0$ Wendetangente sein soll, die Glieder mit $x_1^2 x_2$, $x_1 x_2^2$ und x_2^3 verschwinden. Setzen wir nun $x_3 = \lambda x_1$, so bemerken wir, daß wegen der harmonischen Eigenschaften von

[94]) Diese Schrift ist enthalten z. B. in „*Isaaci Newtoni Opera quae exstant omnia*", comm. S. HORSLEY, Lond. 1779—1785, T. I, S. 531—560 und wurde i. J. 1704 veröffentlicht.

$x_2 = 0$ auch diejenigen Glieder verschwinden müssen, die $x_1 x_2 x_3$ und $x_2 x_3^2$ enthalten, da diese nach unserer Substitution und nach Division mit x_1 zu Gliedern mit $x_1 x_2$ Veranlassung gäben. Die noch übrigen Glieder lassen sich dann in folgender Weise anordnen:

$$x_2^2 x_3 = a x_1^3 + 3 b x_1^2 x_3 + 3 c x_1 x_3^2 + d x_3^3 . \tag{9}$$

Wenn wir, da die Beziehung zum Unendlichfernen unwesentlich sein soll, $x_3 \equiv z$ setzen und statt x_2, x_1 bez. y, x einführen, so gibt dies die Gleichung

$$y^2 = a x^3 + 3 b x^2 + 3 c x + d . \tag{10}$$

In diese Form kann demnach jede Kurve 3. Ordg. gebracht werden. Es ist eine reelle Wendetangente unendlich fern und die zugehörige harmonische Polare ist die x-Achse. Die Kurve ist infolgedessen, wie auch die Gleichung zeigt, symmetrisch zur x-Achse und strebt mit divergierenden Ästen ins Unendliche. NEWTON nannte diese Kurvenformen daher »divergierende Parabeln«. Zur Unterscheidung der möglichen Arten denken wir uns die rechte Seite von Gleichung (10) in ihre linearen Faktoren zerlegt, so daß aus (10) wird

$$y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) . \tag{10*}$$

Dann kann man mit NEWTON folgende fünf Fälle unterscheiden:

I. $\alpha < \beta < \gamma$ (alle Wurzeln reell). Dies gibt einen unendlichen Zweig und ein Oval, d. i. den Typus der zweiteiligen Kubik (Kurve *2* der Figur 52).

II. $\beta = \gamma \gtrless \alpha$. Das Oval hat sich auf einen isolierten Punkt zusammengezogen (Kurve *3*).

III. $\alpha = \beta \gtrless \gamma$. Diese Form geht aus *2* hervor, indem sich das Oval und der unendliche Zweig in einem Knoten vereinigen (Kurve *1*).

IV. β und γ sind konjugiert imaginär. Geht aus *3* hervor dadurch, daß der isolierte Punkt verschwindet: Typus der einteiligen Kurve (Kurve *4*).

V. $\alpha = \beta = \gamma$. Dies ist die Kubik mit Spitze (Kurve *5*).

129. Aus diesen fünf Formen ließen sich, behauptete NEWTON, alle Kubiken durch Projektion (als Schatten) ableiten. Das ist natürlich cum grano salis zu nehmen. Denn es gibt ∞^1 projektivisch verschiedene Kegel 3. Ordg. Wir

F2 Newtons kubische Kurven