Euler-Picard-DGl.en
und
Arithmetische Ball-Uniformisierungen

R.-P. Holzapfel,
ehem.
Akademie der Wiss. / Humboldt-Univ.

Hypergeometrische (gewöhnliche) DGl.en,

$$x(1-x)f'' + (c-(a+b+1)x)f' - abf = 0, \qquad a,b,c \in \mathbb{Q}$$

mit Lösungen:

hypergeometrische Integrale,

hypergeometrische Reihen/Funktionen:

$$f = f(x) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt,$$

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \ ...$$

Höherdimensional,
(zyklo-elliptische) Kurvenfamilie $\mathcal{Y}$/S:

$$y^m = (x-1)^b x^{b_0} (x-t_1)^{b_1} \cdot ...(x-t_n)^{b_n}$$

$$m, b, b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}_+ \text{ fest.}$$

Parameterraum $S \subset \mathbb{A}^n$: $0, 1 \neq t_k,\ t_i \neq t_j (i \neq j)$, mit Ring der regulären (rationalen) Funktionen

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t_1, .., t_n, (t_i - 1)^{-1}, t_j^{-1}, (t_i - t_j)^{-1}],$$
$$i, j = 1, .., n\ (i \neq j).$$

$\mathbb{C}$-Algebra (nichtkommutativ) von Differential-Operatoren

$$\mathbb{C}[S][D] = \mathbb{C}[S][D_1, ..., D_n], \quad D_i := \frac{\partial}{\partial t_i}$$

Multiplikation bzgl. der Aktion auf den rationalen Funktionen-Körper $\mathbb{C}(S) = \mathbb{C}(t_1, .., t_n)$.

$\mathbb{C}[S][D]$-Operationen werden fortgesetzt auf

$$\mathbb{C}(\mathcal{Y}) = \mathbb{C}(S)(x, y)$$

Gauß-Manin-Zusammenhang

Ausdehnung der Derivationen auf Differentialformen, z.B. $\omega = \frac{dx}{y}$, erfassen. Gelingt modulo exakter Differentialformen:

$$0 \longrightarrow d\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{Y}/S} \longrightarrow \mathcal{H}^1_{DR}(\mathcal{Y}/S) \longrightarrow 0$$

Exakte Diff.-Formen
Relative Diff.-Formen
$\mathbb{C}[S][D]$-Modulgarbe

Zyklen-Familie $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_t\}_{t \in W}$ über Wegen $W \subset S$: lokal konstanter Homologiegarbe $\mathcal{H}_1(\mathcal{Y}/S, \mathbb{Z})$, Durch faserweise Integration und analytische Fortsetzung gewinnt man $\pi_1(S)$-multivalente, lokal holomorphe, Funktionen $\oint\limits_{\boldsymbol{\alpha}} \omega$ auf S, z.B. $\oint\limits_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{dx}{y}$ für $\omega = \frac{dx}{y}$. Diese sind mit unseren Derivationen $\delta \in \mathbb{C}[S][D]$ verträglich.

Eulersche Differential-Operatoren:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j} = &\quad D_i D_j + \frac{l}{m(t_j - t_i)}(b_j D_i - b_i D_j) \\ \in &\quad D_i D_j + \mathbb{C}[S]D_i + \mathbb{C}[S]D_j, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

annullieren $\frac{x^k dx}{y^l} \in H^1_{DR}(\mathcal{Y}/S)$.

Picardsche Differential-Operatoren:

$$\varepsilon_{i,i} \in \quad D_i D_i + (\mathbb{C}[S]D_1 + ... + \mathbb{C}[S]D_n) + \mathbb{C}[S],$$

explizit (quantitativ) bekannt, kompliziert,
in Abhängigkeit von m, n, $b, b_0, b_1, ..., b_n$, k, l,

annullieren ebenfalls $\frac{x^k}{y^l} \in H^1_{DR}(\mathcal{Y}/S)$.

Euler-Picard-System (der Kurvenfamilie $\mathcal{Y}/S$):

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, ..., \varepsilon_{1n},$$

$$\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, ..., \varepsilon_{2n},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, ..., \varepsilon_{nn}$$

Beispiel: Picard-Kurvenfamilie

$$\mathcal{Y}/S: \; y^3 = (x-1)x(x-t_1)(x-t_2).$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = D_1^2 &+ \frac{(-5t_1^2 + 4t_1t_2 + 3t_1 - 2t_2)}{3(t_1-1)t_1(t_2-t_1)} D_1 \\ &+ \frac{(t_2-t_1)t_2}{3(t_1-1)t_1(t_2-t_1)} D_2 + \frac{t_2-t_1}{9(t_1-1)t_1(t_2-t_1)} \end{aligned}$$

annulliert $\frac{dx}{y} = \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)x(x-t_1)(x-t_2)}}$ und damit Kurvenintegrale $\oint \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)x(x-t_1)(x-t_2)}}$.

Theorem (Bi-Korrespondenz).

A) Das Euler-Picard-System der Kurvenfamilie $\mathcal{Y}/S$ für (residuenfreie) $\frac{x^k dx}{y^l}$ hat eine (lokale) Lösungsbasis der Gestalt

$$\oint_{\boldsymbol{\alpha}_0} \frac{x^k dx}{y^l}, \oint_{\boldsymbol{\alpha}_1} \frac{x^k dx}{y^l}, ..., \oint_{\boldsymbol{\alpha}_n} \frac{x^k dx}{y^l},$$

$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\alpha}_i(t_1, ...t_n)$ Zyklenfamilie über S.

B) Jeder Differential-Operator aus $\mathbb{C}[S][D_1, .., D_n]$, der alle Integral-Lösungen in A) annulliert, liegt im Linksideal, das von den zugehörigen Euler-Picard-Operatoren ε_{ij} (i,j = 1,..,n) erzeugt wird.

Monodromie:

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S)$ operiert auf Zyklen und damit auf dem Raum der Lösungsbasen. Lösungen werden **multivalent** durch analytische Fortsetzung.

Der Lösungsraum wird zum Darstellungsraum der Fundamentalgruppe:

$$\pi_1(S) \twoheadrightarrow \Gamma \hookrightarrow \mathbb{G}l_{n+1}(\mathbb{C}).$$

Die Bildgruppe Γ bezeichnet man als

Monodromiegruppe

des DGl-Systems.

Universelle Überlagerung $\mathcal{U}$ von S uniformisiert die multivalenten Lösungen.

$$\mathcal{U} \longrightarrow S, \quad \text{mit Faktorraum } \mathcal{U}/\pi_1(S) = S.$$

Def. Die hyperelliptische Kurvenfamilie $\mathcal{Y}/S: \; y^m = p_n(x;t)$ heißt **Ball-Familie**, wenn die zugehörige Monodromiegruppe Γ diskrete Untergruppe der unitären Gruppe $\mathbb{U}((n,1),\mathbb{C})$ ist und $\Gamma\backslash\mathbb{B}$ eine Varietät. In diesem Falle faktorisiert die Uniformisierung über den n-dimensionalen komplexen Einheitsball

$$\mathbb{B}^n: \; |z_1|^2 + |z_2|^2 + ... + |z_n|^2 < 1 \; (|z_0|^2)$$

$$\mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{B}^n \xrightarrow{p_\Gamma} \overline{S} \text{ (alg. compactf.ion of } S\text{)}$$

$$\mathbb{B}^n \twoheadrightarrow p_\Gamma(\mathbb{B}^n) \text{ verzweigte Ball-Uniformisierung}$$

Mostow, Deligne beweisen (1980-s) (Vision/Hypothe von Picard in 1890-s):
Für $n > 1$ gibt es (nur) endlich viele Ball-Familien
$\mathcal{Y}/S: \; y^m = (x-1)^b x^{b_0} \cdot ... \cdot (x-t_n)^{b_n}$.

Vollständige (PTDM-) Liste
(Picard, Terada, Deligne, Mostow):

Löse Diophantische Gleichungssysteme
in den Exponenten $m, b, b_0, b_1, ..., b_n$

Dioph. Gl.-System:

$$n = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{m-b_0-b_1} & \frac{m}{m-b_0-b_2} & \frac{m}{m-b_0-b_3} \\ \frac{m}{m-b_1-b_0} & 0 & \frac{m}{m-b_3-b_2} & \frac{m}{m-b_{-}b_3} \\ \frac{m}{m-b_2-b_0} & \frac{m}{m-b_2-b_1} & 0 & \frac{m}{m-b_2-b_3} \\ \frac{m}{m-b_3-b_0} & \frac{m}{m-b_3-b_1} & \frac{m}{m-b_3-b_2} & 0 \end{pmatrix} \in Mat_4(\mathbb{N}_+ \cup \infty)$$

$b_3 := b$, Vorauss. $0 < \frac{b_i}{m} < 1$.

genau 27 Fälle.

Shimura-Varietäten

Beispiel: Ball-Quotienten

The unitary group $\mathbb{U}((n,1),\mathbb{C})$ wirkt transitiv auf den Ball $\mathbb{B}^n$.

$\mathcal{O}_K$ bezeichne den Ring der ganzen Zahlen des imaginär quadratischen Zahlkörpers K.

Die arithmetische Gruppe $\Gamma_K = \mathbb{U}((n,1),\mathcal{O}_K)$ heißt volle Picardsche Modulgruppe (von K, der Dimension n). Jede Untergruppe Γ endlichen Indexes von $\mathbb{U}((n,1),\mathcal{O}_K)$ heißt

Picardsche Modulgruppe,

$\Rightarrow$ **Picardsche Modulvarietät** $\Gamma\backslash\mathbb{B}$

Picardsche Modulf lächen

$$\widehat{\Gamma\backslash\mathbb{B}}, \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}^2,$$

zu einem $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d}),\ d \in \mathbb{N}_+,$ quadratfrei;
nicht singularitätenfrei

Glattes Beispiel: Körper der Eisensteinzahlen,
Kongruenzuntergruppe $\Gamma(\sqrt{-3})\ := \Gamma_K(\sqrt{-3})$

$$\widehat{\Gamma(\sqrt{-3})}\backslash\mathbb{B} = \mathbb{P}^2$$ (komplexe projektive Ebene)

Namensgebung (1982)

Diese Shimura-Fläche $\widehat{\Gamma(\sqrt{-3})}\backslash\mathbb{B} = \mathbb{P}^2$ ist gleichzeitig Modulf läche der Kurvenfamilie

$$\mathcal{Y}/S: \ y^3 = (x-1)x(x-t_1)(x-t_2).$$

Satz. Die zugehörige Monodromie-Gruppe stimmt mit Modulgruppe $\Gamma(\sqrt{-3})$ überein.

Schnittstelle von

Picard-Lefschetz-Monodromie

(Analysis / Algebraische Topologie),

Shimura's **Modul**-Varietäten

(Algebraische Geometrie / Zahlentheorie).

Fundamentalbereichs-Volumina

Arithmetisches Volumen eines Γ_K-Fu.Ber. $\mathcal{F}_{\Gamma_K}$:

$$Vol_{ar}(\mathcal{F}_{\Gamma_K}) = \prod_{2\leq 2k\leq n} L(\chi_K, -2k) \cdot \prod_{1\leq 2k-1\leq n} \zeta(-(2k-1))$$

$= \int\limits_{\mathcal{F}_{\Gamma_K}} \alpha$, mit "arithmetischer" $\mathbb{B}^n$-Volumenform α;

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$ Riemannsche Zeta-Funktion,

$$L(\chi_K, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_K(m)}{m^s}$$ Dirichletsche L-Reihe.

Zahlentheor. Hintergrund:

p-adische Gruppen $\mathbb{G}_p/\mathbb{Q}_p$, mit

$$\mathbb{G}(\mathbb{Q}) = \mathbb{SU}((n,1),K);$$

p-adische $\mathbb{G}_p(\mathbb{Z}_p)$-Volumina berechnen;

Auf Adéle-Gruppe $\mathbb{G}(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \subset \prod_p \mathbb{G}_p(\mathbb{Q}_p)$

Tamagawa-Maß, Tamagawa-Zahl

$$\Longrightarrow$$

arithmetisches Volumen $Vol_{ar}(\mathcal{F}_{\Gamma_K})$.

Euler- & Signatur-Volumina

Eulerzahl $Eul(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H_i(X, \mathbb{R})$

Beschränkung auf $n = 2$ (komplexe F lächen):

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4, \ (b_i = \text{ i-te Betti-Zahl})$$

Signatur $Sig(X) =$ Schnitt-Signatur auf$H_2(X, \mathbb{R})$

$$b_2^+ - b_2^-$$

Es existieren eindeutig (Lie-invariante) Volumen-Formen ε und σ auf $\mathbb{B} = \mathbb{B}^2$, so daß

$$Eul(\Gamma\backslash\mathbb{B}) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon, \quad Sig(\Gamma\backslash\mathbb{B}) = \int_{\mathcal{F}_\Gamma} \sigma,$$

falls $X = \Gamma\backslash\mathbb{B}$, glatt, kompakt, unverzweigt.

Def. ε heißt **Euler-Form** und σ **Signatur-Form**.

Existenz solcher Ball-Gitter Γ: Hirzebruch, Borel (50-er).

Für die meisten Picard-modularen Kongruenz-Untergruppen Γ gilt:

Toroidale Kompaktif. $\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}$ ist glatt.

Das wird von nun an vorausgesetzt. Dann gilt

$$3 \cdot \int\limits_{\mathcal{F}_\Gamma} \sigma = 3 \cdot Sig(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) - (T^2) - \left\langle \mathfrak{v} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle_0$$

$Div(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) \ni v_1C_1 + ... + v_rC_r$ Verzw.-Divisor.
$\mathfrak{v} = (v_1, ..., v_r) \in \mathbb{N}^r_{\geq 2}$ Verzw.-Vektor,
$\mathfrak{v}^{-1} = (v_1^{-1}, ..., v_r^{-1})$ inverser Verzw.-Vektor

$Div(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) \ni T$ Kompaktif.-Kurve

$\langle .,. \rangle$ Schnittmetrik auf $Div_{\mathbb{Q}}\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}$,
$\langle .,. \rangle_{\mathbf{C}}$ Einschränkung auf Verzweigungsraum

$$\mathbf{V} = \mathbb{Q} \cdot C_1 + ... + \mathbb{Q} \cdot C_r \subset Div_{\mathbb{Q}}\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}},$$

Punktierte / gestutzte Metriken auf $\mathbf{V}$:
$\langle .,. \rangle^*$: 0-Setzen aller Selbstschnitte der C_i;
$\langle .,. \rangle_0$: 0-Setzen aller $< C_i, C_j >,\ i \neq j$;

$$\langle .,. \rangle_{\mathbf{V}} = \langle .,. \rangle^* + \langle .,. \rangle_0$$

Euler-Volumen des Fund.-Ber.:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon = Eul(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) - 2H_0 - 2\left\langle \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle_0$$

$$- \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle^* .$$

$H_0 =$ Anzahl der **rationalen** Kompaktif.-Kurven.

$$\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^r.$$

Abgleichung der drei Volumina

$$Vol_{Eul}(\mathcal{F}_\Gamma) = \int\limits_{\mathcal{F}_\Gamma} \varepsilon = Eul(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) \; - \ldots\ldots\cdots - 2H_0$$

= (Prop)

$$3 \cdot Vol_{Sig}(\mathcal{F}_\Gamma) = \int\limits_{\mathcal{F}_\Gamma} 3 \cdot \sigma = 3 \cdot Sig(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) \; - \cdots - (T^2)$$

=

$c_\Gamma \cdot Vol_{Eul}(\mathcal{F}_\Gamma) = \int\limits_{\mathcal{F}_\Gamma} c_\Gamma \cdot \alpha \quad (\Leftarrow$ L-Reihen-Produkt$)$

c_Γ berechenbarer Faktor
(für Picardsche Kongruenz-Gruppen Γ).

Proportionalität (Dioph. Gl.):

$$Eul(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) - 2H_0 - 2\left\langle \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle_0 - \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathbf{1} - \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle^*$$
$$= 3 \cdot Sig(\overline{\Gamma\backslash\mathbb{B}}) - (T^2) - \left\langle \mathfrak{v} - \mathfrak{v}^{-1}, \mathfrak{v}^{-1} \right\rangle_0$$

Verallgemeinerung der

Proportionalitäts-Formel

von Miyaoka, Yau, Mumford (unverzweigt), Hirzebruch, Kobayashi (verzweigte Spezialfälle).

Bem.: $Eul(X) = 3 \cdot Sig(X)$ extremal für F lächen.
Pic. Modulf lächen approximieren diese Relation. Rational:
$\Gamma_{\widehat{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}}\backslash\mathbb{B}$, $\quad \mathbb{B} = \mathbb{B}^2$, $d = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 15, 19, 23, 31, 39, 47$.

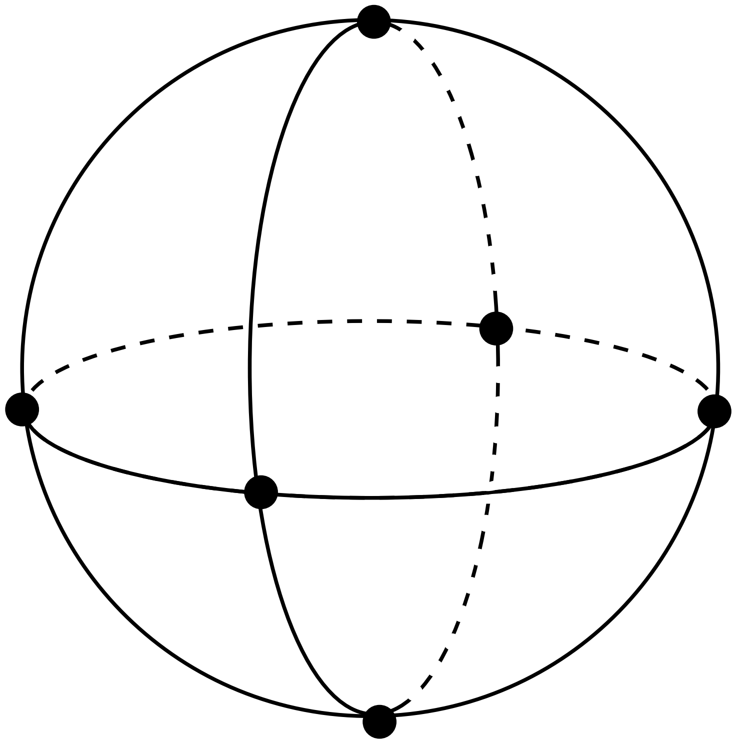
Weitere Folgerungen:

Es gibt unendlich viele Picardsche Modulgruppen Γ, die die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ als (kompaktif.) Quotientenf läche haben. (2003)

Es existieren Monodromie-Gruppen (von EP- DGl.en), die gleichzeitig Picardsche Modulgruppen sind.

Die bekannten sind eng mit den Bewegungs-
Gruppen der regulären Polyeder verbunden.

Oktahedrale Pic. Modulf läche



Auf $\widehat{\Gamma\backslash\mathbb{B}}$ liegen genau 3 rationale Kurven ($\mathbb{P}^1$) und genau 6 (Spitzen-)Singularitäten $\bullet$

Shimura-Kurven

$$\Gamma \subset \Gamma_K = \mathbb{U}((2,1),\mathbb{Z}[i]) \supset \Gamma_K(1-i), \quad K = \mathbb{Q}(i)$$

Gaußsche Zahlen.

Komplexe projektive Ebene:

$$\Gamma_K \widehat{(1-i)} \backslash \mathbb{B} = \mathbb{P}^2$$

$$\mathbb{B} \quad \supset \quad K\text{-Disc} \mapsto \text{Kurve/Zahlk.} \quad \subset \quad \mathbb{P}^2$$

Shimura's **kanonische Modelle**: (in Ebene !!):

Modul-/Shimura-Kurven

Eine klassische Modulform:

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left((\frac{3N}{2} - \frac{1}{8}) a_2(N) + 3 \sum_{m=1}^{N} \sigma(m) a_2(N-m) \right) q^N$$

$q = \exp(2\pi i \tau),\ \tau \in \mathbb{H} :\ Im\, \tau > 0$,
$\sigma(m)$: Summe der Teiler von m;
$a_2(k)$: Anzahl der $\mathbb{Z}$-Lösungen von $x^2 + y^2 = k$.

Theorem. Der N-te (Fourier-)Koeff. zählt die Modul-/Shimura-Kurven (der "Norm" N) der K-Discs (der "Norm" N) auf der $\Gamma(1-i)$-Ebene.

Picardsche Modulformen

der zugehörigen Kurvenfamilie $y^4 = p_2(x)p_3^2(x)$

Thetakonstanten $\quad \vartheta \begin{bmatrix} \mathbf{p}/2 \\ \mathbf{q}/2 \end{bmatrix} ((u,v)) \ :=$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^3} \exp\left\{\pi i(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{p}}{2})\Omega(u,v)^t(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{p}}{2}) + 2\pi i(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{p}}{2})\frac{{}^t\mathbf{q}}{2}\right\}$$

$\Omega : \ \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_3$ (Siegelgebiet),

mit Theta-Charakteristiken $\frac{\mathbf{p}}{2}, \frac{\mathbf{q}}{2} \in \{0, \frac{1}{2}\}^3 \quad \subset \mathbb{Q}^3$,

$(\vartheta_0 : \vartheta_1 : \vartheta_2) : \ \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ alg. Werte in $\mathbb{Q}(i)$-Punkten

Tetrahedrale Pic. Modulformen

zur Picard-Kurvenfamilie $y^3 = p_4(x)$:

$$\mathbb{P}^2 = \Gamma(\widehat{1-\omega})\backslash\mathbb{B} \quad \text{(zu Eisensteinzahlen)}$$

Fourier-Jacobi-Entwicklung der Thetas:

$$f(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u) q^k, \quad q = e^{\frac{2\pi v}{\sqrt{3}}}$$

$u, v \in \mathbb{B}'$ (unbeschränktes Ball-Modell)

$f_k(u)$ klassische Theta-Funktionen zum Eisenstein-Gitter auf $\mathbb{C}$, explizit bekannt.

Dodekaeder/Ikosaeder

zur Kurvenfamilie $y^5 = p_5(x)$ und $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$

$$\widetilde{\mathbb{P}^2} = \Gamma(1-\zeta)\backslash\mathbb{B},$$ kompakt, del Pezzo (rat.)

Thetakonstanten $\Theta\begin{bmatrix}\mathbf{a}/10\\ \mathbf{b}/10\end{bmatrix}(\beta) =$

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^6} \exp\left\{\pi i(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{a}}{10})\Omega(\beta)^t(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{b}}{10}) + 2\pi i(\mathbf{n}+\frac{\mathbf{a}}{10})\frac{{}^t\mathbf{b}}{10}\right\}$$

$\Omega : \mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{H}_6$ (Siegelgebiet, Geschlecht 6), 12 Dodekaeder-Fl. $\longrightarrow \theta_1 = \Theta_1|_{\mathbb{B}}, \ldots.., \theta_{12} = \Theta_{12}|_{\mathbb{B}}$

(automorph auf $\mathbb{B}$)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[d, "\Gamma(1-\zeta)"'] \arrow[dr, "(\theta_1^5 : \ldots : \theta_{12}^5)"] & \\
\widetilde{\mathbb{P}^2} \arrow[r] & \mathbb{P}^{11}
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{C}[\theta_1^5(\beta), \ldots, \theta_{12}^5(\beta)] \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(\widetilde{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}^2}}(-nK_{\widetilde{\mathbb{P}^2}}))$$

Antikanonische Einbettung, antikanonischer Ring