Reise mit dem Notebook nach Babylon zu Plimpton 322

Lebhaft vorstellbar ist, dass babylonische Rechenschüler Tontafeln in ein Spiel verwandelten. Man braucht dazu nur einen Faden
und einen rechtwinkligen Tisch. An einer Ecke legt man als erstes Beispiel den Faden der Länge d = 5 in Höhe h = 4 an die rechte vertikale
Kante und das zweite Ende B des Fadens anschließend an die untere horizontale Tischkante. Dann lässt man den Abstand von B zur Tischecke schätzen, anschließend messen (= 3). Dieses selbst gelegte Fadenmodell scheint mir viel einprägsamer zu sein als die abstrakte Pythagoras-Formel. Man sollte, bevor man sie lernen muss, den Schüler zum Faden (oder auch zu Stäbchen) greifen lassen zur nachhaltigen Erkenntnis für alle Schüler. Pädagogische Reihenfolge:

Experiment →Taschenrechner → Formel →Notebook (zur Visualiserung, für Tabellen und Graphiken).

Der systematische Schritt zum Notebook sollte Abiturienten vorbehalten sein. Statt Bildungs- und PISA-Millionen hin- und herzuschieben, muss die Pädagogik mit den neuen technischen Möglichkeiten in Verbindung mit dem Spieltrieb der Schüler neu überdacht werden. Das wäre eine echte, weniger kostspielige und nachhaltige Reform.

Beim Klassentreffen wurde ich durch die Erinnerung an unseren Primus, dem späteren Orient-Forscher Gerhard Höpp († 2003, Google), angeregt,mit dem Notebook eine (fiktive) Reise nach Babylon zu unternehmen. Dort lagerten auf Tontafeln in Keilschrift rechtwinklige Dreiecke mit verschiedenen spitzen Winkeln, genauer die Längen von Hypothenuse und Kathete bzw. Man erlebt einige Überraschungen:

1.) Alle Dreiecksseiten sind ganzzahlig, mit einer Größenordnung *bis* 18541.
2.) Es wurden nur zwei Seiten angegeben, die dritte mit Hilfe des Satzes von Pythagoras errechnet.
3.) Spezielle Winkelfunktionswerte wurden für alle Tontafel-Dreiecke präzise in Keilschrift angegeben.
4.) Diese erlaubten die Dreiecke nach Größe der spitzen Winkel anzuordnen.
5.) Es mussten Brüche verarbeitet werden, deren Zähler und Nenner in die Millionen gehen. Um sie in Keilschrift zu schreiben, mussten sie mit einer Potenz von 60 multipliziert werden, im höchsten Falle mit der achten.
6.) Die Auswahl der Dreiecke erfolgte mit pythagoräischen Zahlentripeln, deren eine Seite (Höhe) Teiler einer geeigneten Potenz von 60 ist, so dass die (exakte) Keilschriftschreibung der reziproken Werte - und damit der Winkelfunktionswerte - überhaupt erst möglich wurde.

Babylonischer Rechenmeister und Schüler mussten ihren Kopf schon gehörig strapaziert haben.

Mit Hilfe von MAPLE 14 habe ich alle die Dreiecke farblich und winkeltreu visualisiert. Außerdem gelang es mir, die Werte einer einfacheren, uns näher geläufigen, Winkelfunktion in Keilschrift zu schreiben. Die Babylonier hatten sie aller Wahrscheinlichkeit nach auch. Kurt Hensel (1861-1941) sagte einmal in seiner Vorlesung (übermittelt von meinem langjährigen Lehrer, dem Hasse-Schüler Hans Reichardt (1908-1991): "Ich erzähle die Geschichten nicht so, wie sie sich zugetragen haben, sondern so, wie sie sich eigentlich hätten zutragen müssen". Danach richtet sich nun auch mein Notebook. Am Ende steht eine Notebook-Tafel mit allen Dreiecksseiten und Keilschriften der Seitenverhältnisse Hypothenuse/Kathete.

Die beste pädagogische Einführung zum Thema fand ich bei meinem früheren Studienfreund, dem Mathematikhistoriker Dr. Herbert Pieper (1943-2008) in [P 1988]. Lassen wir ihn zuerst zu Wort kommen:

"... Unter den überlieferten Quellen zur Mathematik im Altertum gibt es besondere Juwelen, die man als 'Schauwerke der mathematischen Wissenschaft', die unsere Bewunderung erregen, besonders hervorheben kann.

Eine dieser Kostbarkeiten ist eine gebrannte Tontafel mit recht rätselhaften Zeichen. Die Zeichen müssen einst mittels eines Griffels in weichen Ton eingedrückt worden sein (danach wurde der Ton gebrannt). Bei den geheimnisvollen Zeichen handelt es sich um eine alte Bilderschrift, die wegen des keilförmigen Aussehens ihrer einzelnen Bestandteile "Keilschrift" genannt wird. (Eine erste Untersuchung zur Deutung jener zunächst nicht erklärbar scheinenden Schrift hatte am 4. September 1802 der Gymnasiallehrer G.F.Grotefend der Göttinger Akademie der Wissenschaft vorgelegt.)

Die Tafel stammt aus Mesopotamien, dem Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris. Geschrieben wurde der Keilschrifttext in jener Zeit als Hammurapi König von Babylon war. Die Stadt Babylon, eine der ältesten und prächtigsten Städte des Altertums, erlebte unter Hamurapi (der wahrscheinlich zwischen

1728 und 1686 v.u.Z. regierte) den Höhepunkt ihrer Entwicklung. Babylon war Mittelpunkt eines Großreiches, das sich im Zweistromland (im mittleren Irak) vom Persischen Golf bis hinauf nach Assur (dem Zentrum Assyriens, am rechten Tigrisufer über 350 km nordöstlich von Babylon) erstreckte."

Die Tafel enthält in *mysteriöser Anordnung eine* Vielzahl zweier Zeichen, die - bei Weglassen von Schnörkeln - *den Symbolen* $\sphericalangle$ *und* ∇ (*verkehrtes griechisches* Delta) *ähneln. Letzteres steht für* 1 ersteres für 10. Man kann davon mehrere hintereinander oder in kleinen Blöcken schreiben. Zunächst hat man für kleine Zahlen *ein* Zehnersystem mit Einerziffer ∇ und Zehnerziffer $\sphericalangle$. Man schreibt beispielsweise $\sphericalangle\sphericalangle$ für 20, $\nabla\nabla\nabla$ *für* 3 *und* $\sphericalangle\sphericalangle\nabla\nabla\nabla$ *für* 23. Bereits die Zahl 4 schreibt man als

Block $\begin{bmatrix} \nabla\nabla \\ \nabla\nabla \end{bmatrix}$, im Original ohne *die* (schreibtechnischen) Klammern. Alles klappt so problemlos

von 1 bis 59. Dann greift das sogenannte "Sechzigersystem" ("Sexagesimalsystem") *Die* 60 *spielt wegen ihrer günstigen Teilbarkeitseigenschaften* bis heute auch bei uns eine große Rolle, etwa bei der Zeiteinteilung. Noch 6 mal feiner ist die Gradeinteilung auf dem Kreis. Beispielsweise lesen wir

das Blockpaar $\begin{bmatrix} \nabla\nabla\nabla \\ \nabla\nabla\nabla \end{bmatrix}[\sphericalangle\nabla\nabla]$ als $6\cdot 60+13$. *Die* von mir gesetzten Klammern muss man auf der

babylonischen Tafel erraten. Folgende zwei Blockfolgen kommen (ohne Klammern) auf der auf der Tafel wirklich vor:

$$[\nabla\nabla\nabla][\sphericalangle\sphericalangle\sphericalangle\nabla]\begin{bmatrix} \sphericalangle\sphericalangle\ \nabla\nabla\nabla\nabla \\ \sphericalangle\sphericalangle\ \nabla\nabla\nabla\nabla\nabla \end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix} \nabla\nabla\nabla \\ \nabla\nabla \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \nabla\nabla\nabla \\ \nabla\nabla\nabla \\ \nabla\nabla\nabla \end{bmatrix}\nabla. \qquad (1)$$

Die erste beschreibt die Zahl $3\cdot 60^2+31\cdot 60+49$ ($=12709$ in *unserem Dezimalsystem*), *die zweite soll der Leser ermitteln* (*sie erscheint erkennbar* in *den untenstehenden Matrix − Tabellen*). *Wir haben es also mit Entwicklungen* in 60 − *er Potenzen zu tun* :

$$c_k\cdot 60^k+\ldots+c_2\cdot 60^2+c_1\cdot 60+c_0 \textit{ mit natürlichen Koeffizienten } c_i<60,$$

die mit Keilen $\sphericalangle,\nabla$ beschrieben werden, $0\leqq i\leqq k$;

der i - te Keil - Block (von hinten gezählt) repräsentiert den Summanden $c_i\cdot 60^i$.

Da wir einige Berechnungen ausführen wollen, müssen wir zur uns geläufigen Digitalschreibweise übergehen. Wir übersetzen die Blockfolge bzw. deren Darstellung $\sum_{i=0}^{k} c_i\cdot 60^i$, in die Zahlenfolge $c_k \ldots c_2\, c_1\, c_0$, *wie wir es von unserem Dezimalsystem - allerdings dort ohne Zwischenräume - gewöhnt sind. Der Deutlichkeit halber füllen wir die Zwischenräume mit dem Trennungszeichen •. Die erste Keilschrift − Zahl* in (1) *wird dann* in *das Tripel* $3\bullet 31\bullet 49$ ($\hat{=}3\cdot 60^2+31\cdot 60+49=12709$) *verwandelt. Das Tripel der zweiten zu bestimmen, ist dem Leser überlassen. Aus dem Tripel lässt sich nun leicht die Zahl bestimmen, die gemeint ist. Die Summen − Prozedur* wollen wir für alle Tripel $x=c_2, y=c_1, z=c_0$ *bequem durchführen können. Das bewerkstelligt man mit dem dreistelligen*

Funktionsbefehl, der das innere (*Dot*) *Produkt verwendet. Dafür muss zuerst das Paket* "LinearAlgebra" *abgerufen werden. Dann ist die Summenberechnung ein Kinderspiel* :

> with(LinearAlgebra) : $S := (x, y, z) \rightarrow DotProduct(\langle x, y, z\rangle, \langle 60^2, 60, 1\rangle)$:
> $Beispiel = S(3, 31, 49)$;

$$Beispiel = 12709 \tag{1}$$

Nun können wir die Keilsymbole in *der Tafel bequem ins Digitale übersetzen.*

"Die Tontafel "Pimplon 322" hat eine Größe von etwa 22,7 cm × 8,8 cm. Der Text ist eine Tabelle mit vier Spalten und stellt nur das rechte Teilstück einer größeren Tontafel dar. Jede Spalte hat eine Überschrift, und darunter stehen 15 Zeilen. Die Überschrift der ersten Spalte ist beschädigt, die Überschriften

der zweiten, dritten und vierten Spalte lauten: 'Lösungszahl der Breite', 'Lösungszahl der Diagonale', 'sein Name'. Die letzte (vierte) Spalte enthält die laufende Nummer der 15 Zeilen. Auch in den anderen Spalten stehen Zahlen. Es handelt sich also um eine Zahlentabelle." [P 1988]

***Entkeilte Tontafel Plimpton* 322** (*Google*)

?	$b = Breite$	$d = Diagonale$	*Nummer*
1, 59 • 0 • 15	1 • 59	2 • 49	1
1, 56 • 56 • 58 • 14 • 50 • 6 • 15	56 • 7	1 • 20 • 25	2
1, 55 • 7 • 41 • 15 • 33 • 45	1 • 16 • 41	1 • 50 • 49	3
1, 53 • 10 • 29 • 32 • 52 • 16	3 • 31 • 49	5 • 9 • 1	4
1, 48 • 54 • 1 • 40	1 • 5	1 • 37	5
1, 47 • 6 • 41 • 40	5 • 19	8 • 1	6
1, 43 • 11 • 56 • 28 • 26 • 40	38 • 11	59 • 1	7
1, 41 • 33 • 45 • 14 • 3 • 45	13 • 19	20 • 49	8
1, 38 • 33 • 36 • 36	8 • 1	12 • 49	9
1, 35 • 10 • 2 • 28 • 27• 24 • 26 • 40	1 • 22 • 41	2 • 16 • 1	10
1, 33 • 45	45	1 • 15	11
1, 29 • 21 • 54 • 2 • 15	27 • 59	48 • 49	12
1, 27 • 0 • 3 • 45	2 • 41	4 • 49	13
1, 25 • 48 • 51 • 35 • 6 • 40	29 • 31	53 • 49	14
1, 23 • 13 • 46 • 40	56	1 • 46	15

Als Nr. 4 *finden wir die beiden* in (1) *beschriebenen Keilschriftzahlen* in *digitaler Blockdarstellung wieder. Wir können Breiten und* Diagonalen nun leicht in Dezimalzahlen umrechnen. In Zeilenform geschrieben ergeben sich

```
> B := [119, 3367, 4601, 12709, 65, 319, 2291, 799, 481, 4961, 45, 1679, 161, 1771, 56] :
  Δ := [169, 4825, 6649, 18541, 97, 481, 3541, 1249, 769, 8161, 75, 2929, 289, 3229, 106] :
```

Bildet man die Differenzen $d^2 - b^2$ *der Quadrate , so ergibt sich überraschenderweise jedesmal eine ganze Quadratzahl* h^2. *Ziehen wir die Wurzeln, so erhalten wir die dritten Seitenlängen, die wir nach babylonischem Vorbild als Höhen h bezeichnen.*

$$> H := [seq(\mathrm{sqrt}(\Delta[j]^2 - B[j]^2), j = 1..15)]$$

$$H := [120, 3456, 4800, 13500, 72, 360, 2700, 960, 600, 6480, 60, 2400, 240, 2700, 90] \tag{2}$$

Wir wollen die fünfzehn Dreiecke verschieden einfärben. Dazu basteln wir uns eine Farbpalette :

```
> Fb := ["Yellow", "GreenYellow", "SpringGreen", "LimeGreen", "Green",
      "BlanchedAlmond", "DarkSalmon",
  "OrangeRed", "Red", "Crimson", "Lavender", "Turquoise", "CornflowerBlue", "BlueViolet",
      "Navy"] :
```

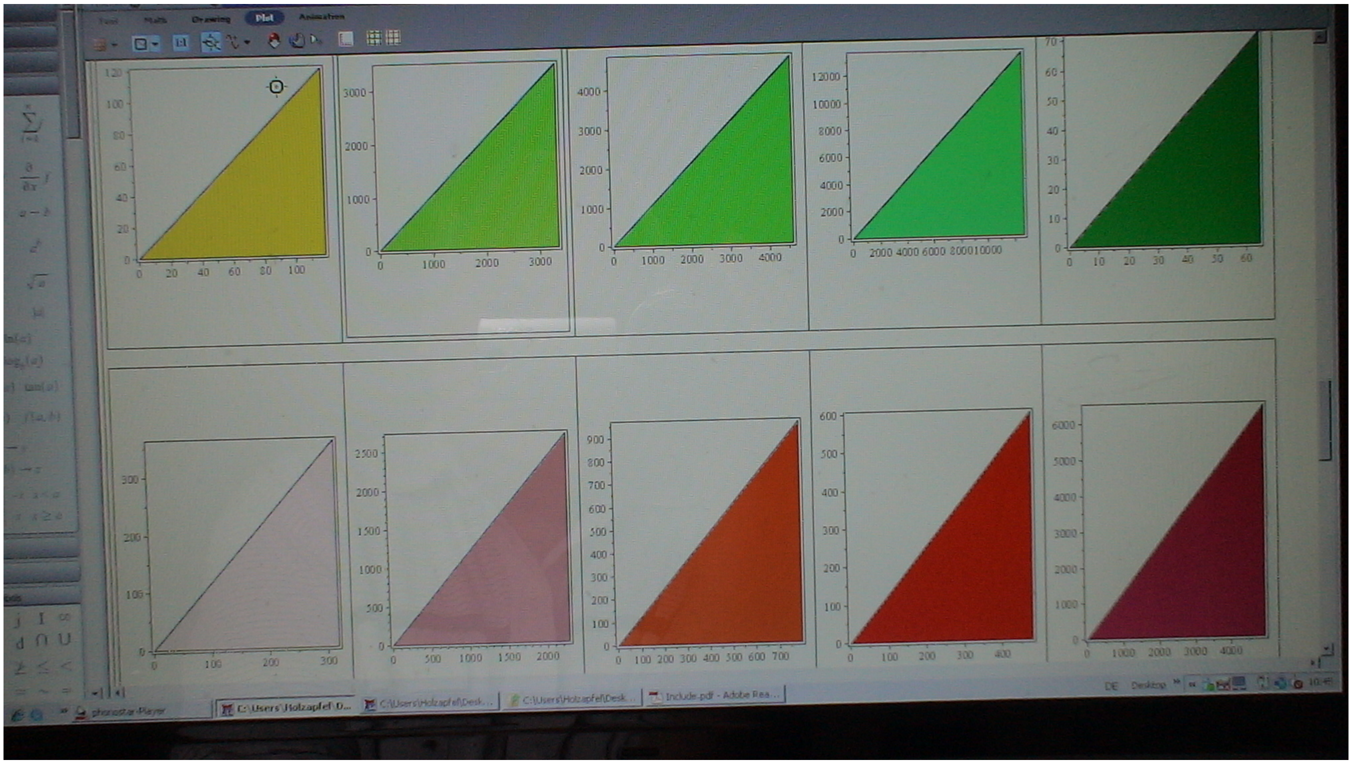
Jetzt müssen wir die Eckpunkte der Dreiecke in *der Ebene eingeben. Die Koordinatenpaare schreiben wir* in *die Zeilen einer Matrix* :

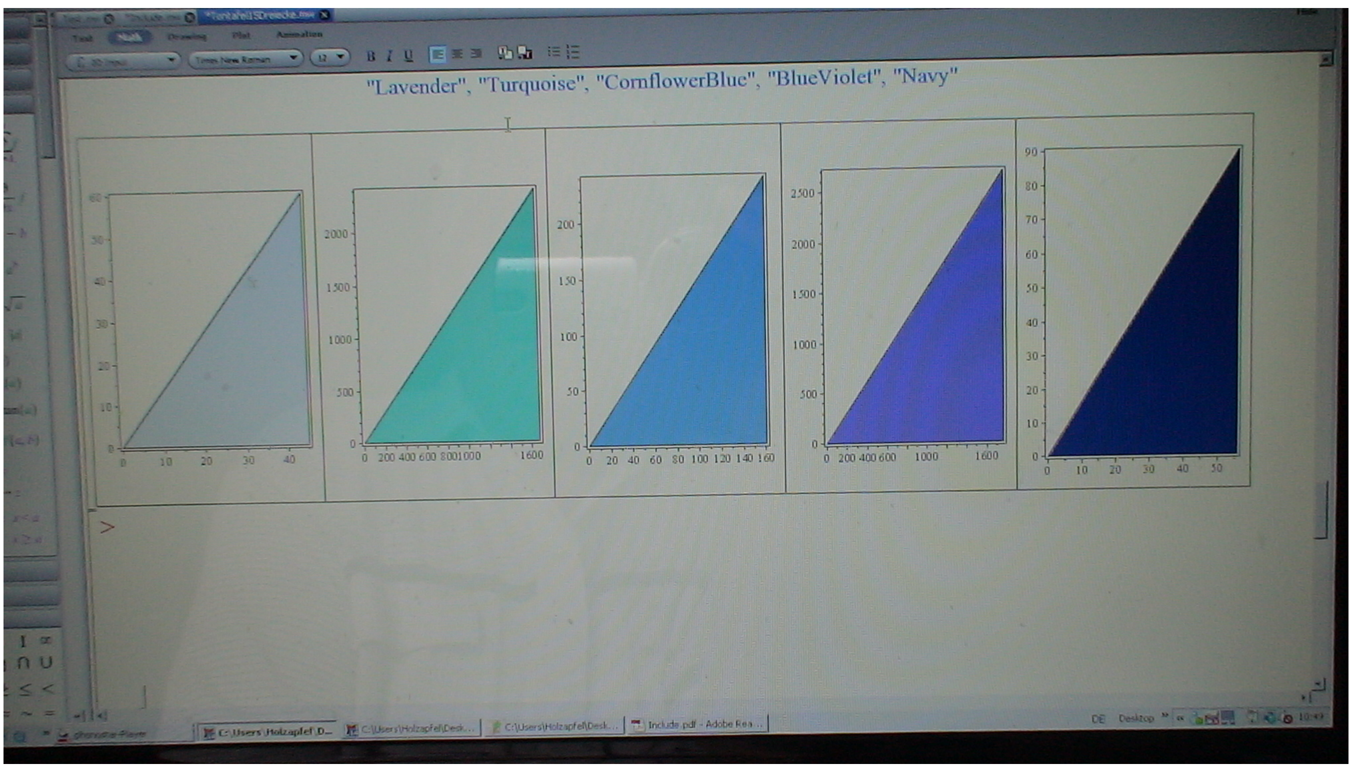
```
> for j from 1 to 15 do Tr[j] := Matrix([[0, 0], [B[j], 0], [B[j], H[j]]]) od:
  Beispiel10 = Tr[10]
```

$$Beispiel10 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4961 & 0 \\ 4961 & 6480 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Nun haben wir alles zu maßstabsgetreuen Visualisierung der Dreiecke in *der Hand. Wir plotten sie* in *drei Fünferpacks* :

```
> with(plots) : seq(Fb_j, j = 1..5) : G := Array(1..5) :
   for j from 1 to 5 do G[j] := polygonplot(Tr_j, axes = boxed, scaling = constrained, colour
      = Fb[j]) od: display(G) :
  seq(Fb_j, j = 6..10) : R := Array(1..5) :
   for j from 1 to 5 do R[j] := polygonplot(Tr[5 + j], axes = boxed, scaling = constrained,
      colour = Fb[5 + j]) od: display(R) :
  seq(Fb_j, j = 11..15) : Bl := Array(1..5) :
   for j from 1 to 5 do Bl[j] := polygonplot(Tr[10 + j], axes = boxed, scaling = constrained,
      colour = Fb[10 + j]) od: display(Bl) :
```





Abfotografiert von original MAPLE-Bildern mit weißem Hintergrund.

Das Anwachsen der spitzen Winkel im Ursprung von etwa 45 *bis ca.* 60 *Grad ist jetzt sichtbar. Wir wollen die Winkel genauer ermitteln mit Hilfe der Sinus − Funktion* :

$$> SN := seq\left(\frac{H[j]}{\Delta[j]}, j = 1..15\right) : Sn := seq(evalf[4](\mathrm{SN[j]}), j = 1..15) :$$

$$Winkel := seq\left(evalf[4]\left(\arcsin(Sn_j)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)\right)^{o}, j=1..15\right);\ InvSin := seq\left(SN[j]^{-1}, j=1..15\right)$$

$$Winkel := 45.23^{o}, 45.74^{o}, 46.22^{o}, 46.73^{o}, 47.94^{o}, 48.45^{o}, 49.69^{o}, 50.23^{o}, 51.28^{o}, 52.55^{o}, 53.12^{o}, 55.03^{o}, 56.15^{o}, 56.75^{o}, 58.09^{o}$$

$$InvSin := \frac{169}{120}, \frac{4825}{3456}, \frac{6649}{4800}, \frac{18541}{13500}, \frac{97}{72}, \frac{481}{360}, \frac{3541}{2700}, \frac{1249}{960}, \frac{769}{600}, \frac{8161}{6480}, \frac{5}{4}, \frac{2929}{2400}, \frac{289}{240}, \frac{3229}{2700}, \frac{53}{45} \quad \textbf{(4)}$$

Es überrascht, dass die babylonischen Rechenmeister in der Lage waren, spezielle Brüche in Keil − *schrift präzise darzustellen. Das wollen* wir für die Seitenverhältnisse $\frac{d}{h}$ der Tontafel Dreiecke nachvollziehen. Zunächst erinnere ich daran, dass in unserem Digitalsystem genau die Brüche q eine *exakte* Darstellung haben, wenn der Nenner nur die Primteiler 2 und 3 hat. Genau dann gibt es nämlich eine Potenz der 10, die den Nenner wegmultipliziert. Alle anderen rationalen Zahlen haben eine unendliche Periode ab einer Stelle nach dem Komma. Ähnlich ist es im Sechziger − *system. Ein Bruch lässt sich genau dann exakt mit endlich vielen Keilen beschreiben, wenn der* Nenner, mit einer geeigneten 60 − Potenz multipliziert, ganzzahlig wird. Das ist genau dann der Fall, wenn der Nenner nur die Primfaktoren 2, 3 bzw. 5 hat. Die babylonische (uhrenähnliche) Unterteilung ist eben etwas feiner *als die digitale* : *Es lassen sich mehr rationale Zahlen* mit endlich vielen Ziffern *exakt hinschreiben als* das bei uns der Fall ist. So sind alle reziproken *Höhen* $\frac{1}{h}$ aus der Tabelle in babylonischen *Blöcken* darstellbar, und damit auch *alle* Seiten − *verhältnisse* $\frac{d}{h} = \frac{1}{\sin}$.

> $Beispiel2 = PrimzerlegungNenner(h_2)\ : H[2] = ifactor(H_2);\ ifactors(H_2)[2]$

$$3456 = (2)^{7}\,(3)^{3}$$

$$[[2, 7], [3, 3]] \quad \textbf{(5)}$$

Merkwürdigerweise enthält die erste Spalte der Tontafel die Quadrate $\frac{d^2}{h^2}$. *Zähler und Nenner der Quadrate der Tabellenbrüche gehen* in *die Millionen, z.B. ist* $\left(\frac{4825}{3456}\right)^2 = \frac{23280625}{11943936}$. *Trotzdem werden wir mit dem Notebook die fehlende Tontafel − Spalte rekonstruieren. Die Seitenverhältnisse* $\frac{d}{h}$ *werden wir* in *Keilschrift verwandeln, um sie den Babyloniern nachzureichen. Ich vermute aber, dass diese inversen Sinus − Werte auf einer verlorengegangenen Tontafel der Babylonier bereits eingekerbt waren.*

Zunächst müssen wir in der Lage sein, die "Sexaginalisierung" für natürliche Zahlen durchzuführen. *Die* Prozedur der Division durch 60 *mit* Rest wird einfach mehrmals wiederholt. Jeder Schritt liefert *ein* Paar, das aus Divisionsquotienten und Rest besteht. Beispielsweise ist 18093750 : 60 = $= 301562\cdot 60$ *Rest* 30. *Der Output der Prozedur ist dann* [301562, 30]. *Die erste Komponente wird nun genauso behandelt. Letztendlich erhalten wir das Tupel* [1, 23, 46, 2, 30], *wovon wir die Zerlegung* $18093750 = 1\cdot 60^4 + 23\cdot 60^3 + 46\cdot 60^2 + 2\cdot 60 + 30$ bzw. die babylonische Blockfolge 1 • 23 • 46 • 2 • 30 *ablesen.*

> $qr := \textbf{proc}(z);$

```
[iquo(z, 60), irem(z, 60)];
end proc:
Beispiel = qr(18093750);
```

$$Beispiel = [301562, 30] \tag{6}$$

Das bedeutet $12709 = 211 \cdot 60 + 49$. *Nun ist* $211 = 3 \cdot 60 + 31$ *und damit* $12709 = 3 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60 + 49$, *was sich als Blockfolge* $3 \bullet 31 \bullet 49$ *schreiben lässt, die sich sofort* in *Keilschrift übertragen lässt. Wir haben Breitenspalte* in *der vierten Zeile wiedergewonnen, siehe* (1). *Um die Blockfolge einer größeren Zahl zu bestimmen, brauchen wir einen Algorithmus. Dazu ermitteln wir eine universelle Potenz der* 60, *die simultan alle Nenner von* $\frac{d}{h}$ *wegmultiüliziert. Wir benötigen dazu nur die Primteiler − Exponenten* v_p, $p = 2, 3, 5$, *aller Nenner* h *unserer* 15 *Tafel − Dreiecke.*

```
> PrimteilerExponentenDerHöhen:
  for k from 1 to 3 do v[ithprime(k)] := seq(ifactors(ithprime(k)·gcd(H[j],
      ithprime(k)^10))[2][1][2] − 1, j = 1..15) od;
```

$$v_2 := 3, 7, 6, 2, 3, 3, 2, 6, 3, 4, 2, 5, 4, 2, 1$$
$$v_3 := 1, 3, 1, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 2$$
$$v_5 := 1, 0, 2, 3, 0, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1 \tag{7}$$

Es stellt sich heraus, dass es ausreicht, alle 15 *reziproken Höhen* $\frac{1}{h}$ *mit der* 4. *Potenz von* 60 *zu multiplizieren, um eine ganze Zahl zu erhalten. Das ist dann auch für die reziproken Sinus − Brüche* $\frac{1}{\sin} = \frac{d}{h}$ *richtig.*

```
> G := seq(InvSin[j]·60^4, j = 1..15):
> Qr[0] := seq(qr(G[j]), j = 1..15):
  for k from 1 to 4 do Qr[k] := seq(qr(Qr_{k−1}[j][1]), j = 1..15) od:
  for m from 0 to 4 do Rs[m + 1] := seq(Qr_m[j][2], j = 1..15) od:
  R := linalg[matrix](5, 15, [seq(Rs[j], j = 1..5)]);
```

$$R := \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 45 & 16 & 0 & 0 & 20 & 45 & 0 & 53 & 0 & 30 & 0 & 20 & 0 \\ 30 & 46 & 6 & 24 & 50 & 10 & 41 & 3 & 54 & 33 & 0 & 13 & 15 & 45 & 40 \\ 24 & 23 & 23 & 22 & 20 & 20 & 18 & 18 & 16 & 15 & 15 & 13 & 12 & 11 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Daraus liest man die sexagesimalen Potenzentwicklungen der $\frac{d}{h}$ *spaltenweise ab. Beispielsweise entnehmen wir der* 4. *Spalte die Entwicklung* $60^4 \cdot \frac{d}{h} = 1 \cdot 60^4 + 22 \cdot 60^3 + 24 \cdot 60^2 + 16 \cdot 60 + 0 \cdot 60^0$, *woraus sich die Bruchentwicklung* $\frac{d}{h} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{16}{60^3}$ *ergibt. Diese Entwicklungen lassen sich* in *Keilschrift ausdrücken. In diesem Beispiel erhalten wir die* (*symbolischen*) *Blöcke*:

$1, 22 \bullet 24 \bullet 16$ *oder Keil-babylonisch*: ∇, ∢∢∇∇ ∢∢∇∇∇∇ ∢∇∇∇∇∇∇.

Das kann man natürlich auch mit den Quadraten $\frac{d^2}{h^2}$ *durchführen, um dann die erste Spalte der Tontafel* in *Keilschrift zu reproduzieren. dabei müssen wir simultan mit der* 8. *Potenz von* 60 *multiplizieren.*
Wir brauchen dazu nur die G − Sequenz zu quadrieren.

```
> G2 := seq(G[j]^2, j=1..15) : Qr2[0] := seq(qr(G2[j]), j=1..15) :
  for k from 1 to 8 do Qr2[k] := seq(qr(Qr2_{k-1}[j][1]), j=1..15) od:
  for m from 0 to 8 do Rs2[m+1] := seq(Qr2_m[j][2], j=1..15) od:
  R2 := linalg[matrix](9, 15, [seq(Rs2[j], j=1..9)]);
  for j from 1 to 15 do S2[j] := seq(R2[10 - i, j], i=1..9) od:
```

$$R2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 45 & 16 & 0 & 0 & 40 & 45 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 50 & 33 & 52 & 0 & 0 & 26 & 3 & 0 & 27 & 0 & 15 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 14 & 15 & 32 & 40 & 40 & 28 & 14 & 36 & 28 & 0 & 2 & 45 & 35 & 40 \\ 15 & 58 & 41 & 29 & 1 & 41 & 56 & 45 & 36 & 2 & 0 & 54 & 3 & 51 & 46 \\ 0 & 56 & 7 & 10 & 54 & 6 & 11 & 33 & 33 & 10 & 45 & 21 & 0 & 48 & 13 \\ 59 & 56 & 55 & 53 & 48 & 47 & 43 & 41 & 38 & 35 & 33 & 29 & 27 & 25 & 23 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

```
>
```

Wieder können wir von den Spalten die Ziffernfolge in Keilschrift ablesen, z.B. ist das zehnte reziproke Sinusquadrat

$$\frac{d^2}{h^2} = \frac{66601921}{41990400} \triangleq 1, 35 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 24 \cdot 26 \cdot 40 \triangleq$$

∇, ∢∢∢∇∇∇∇∇ ∢ ∇∇ ∢∢∇∇∇∇∇∇∇∇ ∢∢∇∇∇∇∇∇∇ ∢∢∇∇∇∇ ∢∢∇∇∇∇∇∇ ∢∢ ∢∢

Notebook-Tafel 322

Winkel zw. h, d	*Reziproker Sinus d / h*	*Höhe h*	*Diagonale d*	*Breite b*	*Nr.*
45.23^o	1, 24•30	120	169	119	1
45.74^o	1, 23 • 46 • 2 • 30	3456	4825	3367	2
46.22^o	1, 23 • 6 • 45	4800	6649	4601	3
46.73^o	1, 22 • 24 • 16	13500	18541	12709	4
47.94^o	1, 20 • 50	72	97	65	5

48.45^o	1, 20 • 10	360	481	319	6
49.69^o	1, 18 • 41 • 20	2700	3541	2291	7
50.23^o	1, 18 • 3 • 45	960	1249	799	8
51.28^o	1, 16 • 54	600	769	481	9
52.55^o	1, 15 • 33 • 53 • 20	6480	8161	4961	10
53.12^o	1, 15	60	75	45	11
55.03^o	1, 13 • 13 • 30	2400	2929	1679	12
56.15^o	1, 12 • 15	240	289	161	13
56.75^o	1, 11 • 45 • 20	2700	3229	1771	14
58.09^o	1, 10 • 40	90	106	56	15

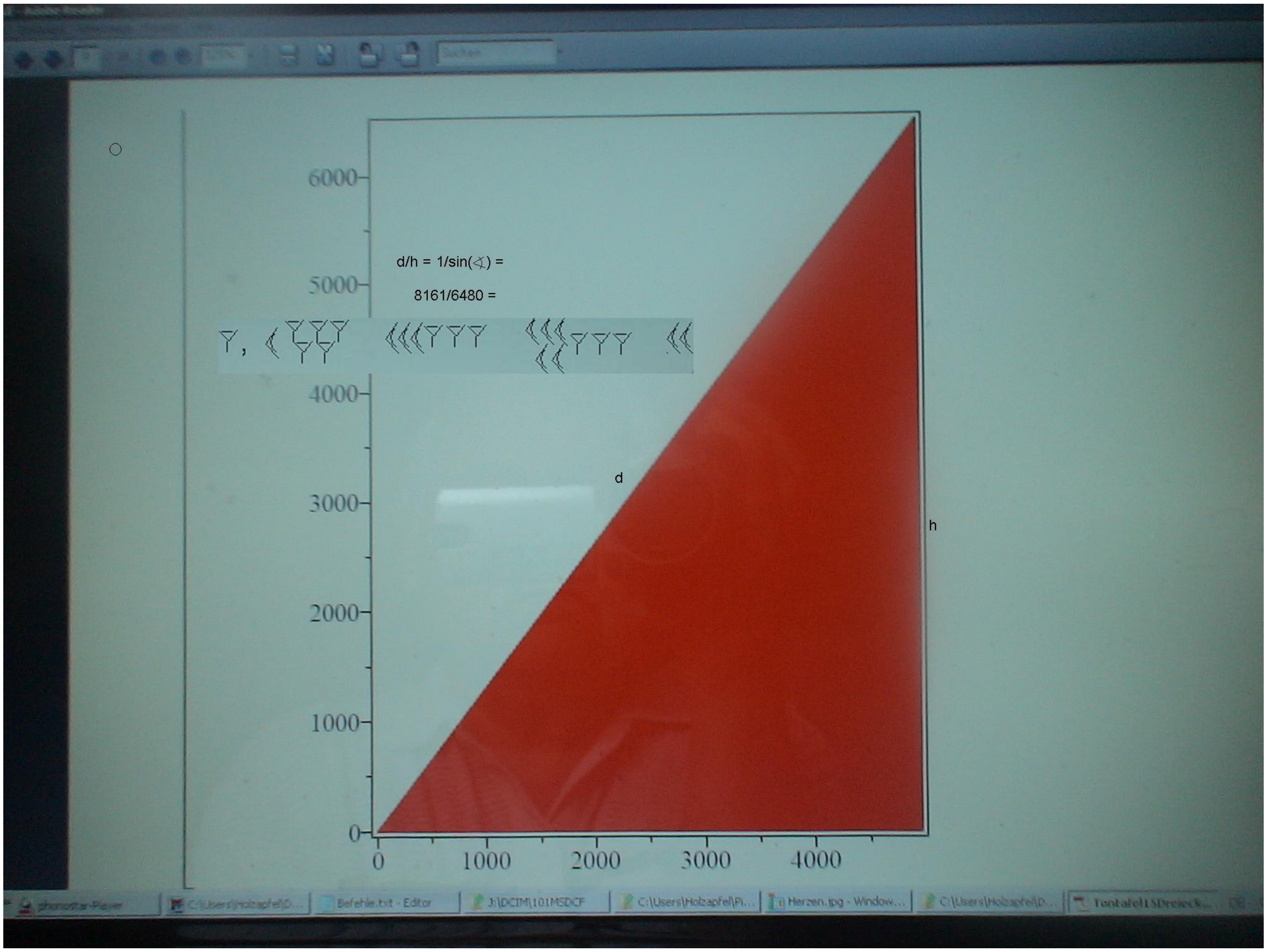
Man kann sich nun leicht vorstellen, wie mit Hilfe der Tabelle praktische Bauarbeiten durchgeführt wurden, z.B. beim Abstützen von Pallisaden, die der Befestigung einer Anlage dienten. Für verschiedene

Anlagen musste man verschiedene Winkel für die Stützpfeiler parat haben. Nehmen wir an, es wurde ein Stützwinkel von 50° gebraucht. Den findet man (annähernd) in der 8. Tabellenreihe. Der Baumeister markiert die Höhe von h = 9,6 am Pallisadenpfahl. Dann schneidet er ein Seil der "Diagonal"-Länge d = 12,5 zurecht. Dieses wird mit einem Ende an der Markierung befestigt. das andere Ende wird vertikal zum Pfahl auf der Erde gezogen bis es straff ist. Entlang dieses Seils wird der Stützpfeiler eingerammt. Er hat dann den richtigen Stützwinkel von ca. 50°. Der Abstand des Seil-Bodenpunktes zum Fußpunkt des Pfeilers ist b = 8 (alles gerundet und in fiktiver Maßeinheit).

Das obige achte Farbdreieck "OrangeRed" *ist die Notebookmaßstab – Visualisierung. Vertauscht man die Rollen von b und h, so erhält man den komplementären Stützwinkel* $90° - 50° = 40°$. *Die Babylonier verfügten mit obiger Tontafel also über* $2 \cdot 15 = 30$ *Winkel, zwischen* $32°$ *und* $58°$.

Literatur:

[P 1988] Pieper, Herbert, HEUREKA Ich hab's gefunden, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988



Dreieck Nr.10 auf Tontafel Plimpton 322 mit Seitenverhältnis in (selbstbestimmter) Keilschrift.