

# Ganzzahlige Ballpunkte und Theta-Reihen

R.-P. Holzapfel

## 1 Vorwort

Ich habe mich oft gefragt: Wie sind eigentlich Euler und Gauß zu ihren interessanten Ergebnissen gekommen? Die ursprünglichen Gedankengänge gingen des öfteren verloren, denn im Laufe der Zeit wurde viel Mühe darauf verwandt, die schnellsten und modernsten Argumente zu finden, um insgesamt möglichst viel Stoff zu bewältigen. Das hat sicherlich auch seine Berechtigung. Es wird effektiver, aber auch mysteriöser. Man kann die Kreativität nicht mehr so recht nachvollziehen. Bei unseren Altmeistern ist die große Rechenfertigkeit auffällig, die sie sich schon in früher Jugend erarbeiteten. Darauf aufbauend kann man ihre Methode folgendermaßen strukturieren:

- 1.) Empirisches Erkennen von Gesetzmäßigkeiten;
- 2.) Aufstellen einer Hypothese;
- 3.) Überprüfung der Vermutung anhand weiterer Beispiele;
- 4.) Bestätigung durch einen Beweis.

Heute hat die Jugend auf breiter Front die Chance mit Hilfe des Laptops, diese Methode anzuwenden. Die kreative Komponente des Lernprozesses wird auf spielerische Weise gestärkt, was eine wichtige Voraussetzung für spätere eigene Arbeiten ist. Um einen solchen Zugang zu erleichtern sollen hier Grundbefehle für MAPLE 14 erörtert werden, die man dann auch später anwenden kann. Am Anfang wird eine elementare Vermutung überprüft. Wir steigen also in Punkt 3) des obigen Programmes ein. Am Ende - nach spielerischer MAPLE-Präsentation einiger klassischer Reihenentwicklungen (Fourier, Jacobi, Hecke) - wird schließlich ein Beweis geführt. Das ist Schritt 4.) des obigen Kreativitätsprogramms. Die Argumente beruhen auf tiefere Einsichten in die Theorie der Modulformen. Durch Verweis der schwierigen Stellen auf die Literatur gelingt es, alles einfach und breit verständlich zu formulieren. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Angeregt zum Aufschreiben dieser Note wurde ich von Besuchen zweier Schulen in Brandenburg zum Tag der offenen Tür im Februar 2011. Es gibt jeweils einen Computerraum. Zum spielerischen Erlernen von Geometrie und Algebra wird er nicht genutzt, wie mir die Mathe- und Informatik-Lehrer bestätigten. Im Kontrast dazu findet man im Internet begeisterte (ausländische) Kommentare zur Nutzung der Programme für Lehrer und Schüler. Schulnahe Anleitungen mit digitalem Spaß sind vonnöten.

# Contents

1	Vorwort	1
2	Einleitung: Ganzzahlige Kreis- und Ballpunkte	2
3	Die Überprüfung	3
4	Eingreifen einer klassischen Theta-Reihe	4
5	Theta-Reihen und Modulformen	5
6	Hecke's und Cogdell's Theta-Reihen	6
7	Koeffizientenvergleich der Reihen	8
8	Visualisierung und pythagoräische Aufgaben	9

## 2 Einleitung: Ganzzahlige Kreis- und Ballpunkte

Wir starten mit einem einfachen Problem, mit dem Lehrsatz von Pythagoras als Ausgangspunkt: Wieviele ganzzahlige Punkte (d.h. solche mit ganzzahligen Koordinaten) liegen auf dem Kreis vom Radius  $\sqrt{N}$ . Dazu hat man die diophantische Gleichung  $x^2 + y^2 = N$  zu lösen. Mit dieser Problematik hat sich schon Gauß befasst und auch eine vollständige Antwort gegeben. Das wird in den Anfangsvorlesungen zur Zahlentheorie bzw. Algebra gelehrt. Gauß verband es mit der Einführung und arithmetischen Untersuchungen des Ringes  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  der ganzen Gaußschen Zahlen. Die Lösungszahl  $K_N$  stimmt dann mit der Anzahl der ganzen Gaußschen Zahlen  $x + iy$  überein, deren Norm  $N$  ist. Als Hauptschritt wurde festgestellt, welche Zahlen  $N$  überhaupt Normen von ganzen Gaußschen Zahlen sind.

Wir begeben uns anschließend in die komplexe dritte Dimension. Als komplexen  $N$ -Ball bezeichnen wir die Oberfläche der komplexen Kugel

$$\{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3; |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 < N\}$$

Die Lösungen der diophantischen Gleichung  $|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 = N$  im Bereich der ganzen Gaußschen Zahlen nennen wir *ganze Punkte des  $N$ -Balls*, deren Anzahl wird mit  $B_N$  bezeichnet.

Überraschenderweise lässt sich jedes  $B_N$  mit Hilfe einer elementaren Formel auf die Anzahlen  $K_n$ ,  $n \leq N$ , ganzzahliger Kreispunkte zurückführen. Und zwar gilt für alle natürlichen Zahlen  $N$ :

$$(1) \quad B_N = (4 - 12 \cdot N) \cdot K_N + 8 \cdot \sum_{m=0}^N (2 - 5 \cdot (-1)^m) \cdot K_{N-m} \cdot \sigma(m).$$

Dabei ist  $\sigma(m)$  die Anzahl der Teiler von  $m$  mit der Konvention  $\sigma(0) = 1$ .

Diese Formel wird überprüft, um dann entlang einer Überprüfungskette mit Reihenentwicklungen letztendlich bewiesen zu werden. Wir geben stets die ersten 10 Glieder von Folgen oder Reihen an. Dem Leser wird empfohlen - um spielerisch aktiv zu werden und die Überlegungen und Techniken besser zu verinnerlichen - die Rechenbefehle auf eine größere Anzahl von Gliedern, z.B. 20, fortzusetzen. Eine elementare Beweisführung ist mir unbekannt. Vielleicht findet jemand eine auf kreativ-spielerischem Weg.

### 3 Die Überprüfung

Es sei bemerkt, dass man den komplexen N-Ball im  $\mathbb{C}^3$  als reellen N-Ball im euklidischen  $\mathbb{R}^6$  ansehen kann. Man hat dann die  $\mathbb{Z}$ -diophantische Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = N$$

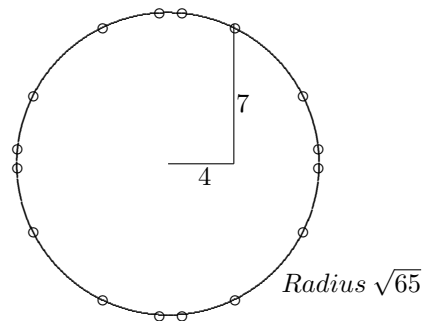
zu lösen.

Zunächst kann man die ganzzahligen Kreispunkte einfach mit MAPLE ermitteln, Beispiel  $N = 65$ :

$$> \text{isolve}(x^2 + y^2 = 65) :$$

**Bemerkung 1** *Einen MAPLE-Befehl werden wir am Anfang stets mit ">" kennzeichnen. Ersetzt man ":" durch ";" so werden alle Lösungen aufgezählt. Wir überlassen diesen Wechsel bisweilen dem interessierten Leser.*

Statt der numerischen Liste visualisieren wir das Resultat in der xy-Ebene.



Im letzten Abschnitt geben wir die MAPLE-Befehle an, die eine solche Visualisierung ermöglichen.

Um die Anzahl der Lösungen rein numerisch zu ermitteln, muss man sie als Tupel schreiben, was durch Einrahmung "[..]" gelingt. Dann greift der Befehl "nops":

$$> \text{nops}([\text{isolve}(x^2 + y^2 = 65)]) :$$

Output: 16

Damit repräsentieren die gerade geplotteten 16 Punkte alle Lösungen. Für  $N = 1, 2, 3, \dots$  kriegt man die Anzahlfolge soweit man möchte, z.B. bis 10:

```
> for n from 0 to 100 do K[n] := nops([solve(x^2 + y^2 = n)]) od :
```

Um die Anzahl-Folge  $K[n]$  (von "Kreis") horizontal zu schreiben, verwenden wir den Sequenz-Befehl:

```
> seq(K[n], n = 0..10);
```

Output: 1, 4, 4, 0, 4, 8, 0, 0, 4, 4, 8

```
> with(numtheory) : seq(sigma(m), m = 0..10);
```

Output: 0, 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18

Zur Probe kann man die Anzahl  $\tau(n)$  aller Teiler jeder natürlichen Zahl  $n$  ermitteln und auch alle Teiler, zum Beispiel

```
> divisors(65), Anzahl = tau(65) :
```

Output: 1, 5, 13, 65, Anzahl = 4

Wir berechnen die Glieder  $b_N$  der Folge auf der rechten Seite von (1):

```
> for N from 0 to 10 do
```

$$b[N] := (4 - 12 \cdot N) \cdot K[N] + 8 \cdot \sum_{m=0}^N (2 - 5 \cdot (-1)^m) \cdot K[N - m] \cdot \sigma(m),$$

```
od :
```

Für die ersten Glieder  $b_0, b_1, \dots, b_{10}$  erhält man:

```
> seq(b[N], N = 0..10);
```

Output:

(2) 1, 12, 60, 160, 252, 312, 544, 960, 1020, 876, 1560.

## 4 Eingreifen einer klassischen Theta-Reihe

Wir sehen gleich, dass die  $b_N$ -Folge,  $N \leq 10$ , mit der Koeffizientenfolge einer Theta-Reihe  $\vartheta_6$  übereinstimmt. Diese Reihenkoeffizienten können wir wiederum leicht mit dem MAPLE-Programm berechnen. Zur Aufstellung dieser Reihe erinnere ich zunächst an Jacobi's bekannte sogenannte *Theta-Konstante*

$$\vartheta(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} q^{m^2} = 1 + 2 \sum_{n > 0} q^{n^2} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) \cdot (1 + q^{2k-1})^2$$

definiert auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} \tau > 0\}$ , mit  $q = e^{2\pi i \tau}$ ; vgl. [BF], VI.6.

```
> \vartheta := taylor(1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^{100} q^{m^2}, q, 100);
```

Output:

$$\vartheta := 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + 2q^{36} + 2q^{49} + 2q^{64} + \dots$$

Die 6. Potenz dieser Reihe liefert unsere obigen  $b_n$  gerade als Koeffizienten, siehe (2):

$$>\vartheta^6 := \text{taylor}(\vartheta^6, q, 8);$$

$$\vartheta^6 = 1 + 12q + 60q^2 + 160q^3 + 252q^4 + 312q^5 + 544q^6 + 960q^7 + O(q^8)$$

**Bemerkung 2** *Es ist eine altbekannte und einfach zu verifizierende Tatsache, dass die Anzahl der ( $\mathbb{Z}$ -)Lösungen der diophantischen Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = N$  genau durch die Koeffizienten der  $n$ -ten Potenz der  $\vartheta$ -Reihe angegeben, siehe [BF], VII.1. Diese Anzahlen können mit MAPLE und mit Hilfe der  $\vartheta$ -Reihe ermittelt werden. Für  $n = 6$  ist das gerade die Anzahl  $B_N$  der ganzzahligen Ballpunkte.*

Offen bleibt das Problem, ob und wieso die Relation (1), d.h.

$$B_N = b_N, \quad N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

allgemein gilt.

## 5 Theta-Reihen und Modulformen

Dazu muss man zunächst wissen, dass die Potenzen von  $\vartheta(\tau)$  klassische Modulformen sind. Das sind holomorphe Funktionen  $f(\tau)$  auf der oberen Halbebene, die sich bei einer Gruppe gebrochen-linearer Verschiebungen des Arguments quasiperiodisch verhalten:

$$f(\gamma(\tau)) = \mu(\tau) \cdot f(\tau)$$

für eine geeignete nirgends auf  $\mathbb{H}$  verschwindende Funktion  $\mu(\tau)$  und für alle  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\tau \in \mathbb{H}$ . Genauer ist  $\Gamma$  eine Untergruppe endlich von endlichem Indexes der modularen Gruppe  $\mathbb{S}l_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$

$$\gamma(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \mu(\tau) = \chi(\tau) \cdot (c\tau + d)^k, \quad k \in \mathbb{N}_+, \quad \chi : \mathbb{S}l_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

ein auf  $\Gamma$  trivialer Gruppenhomomorphismus. Man nennt dann  $f(\tau)$  eine  $\Gamma$ -Modulform des Gewichtes  $k$  vom Nebentypus  $\chi$ . Der Hamburger Mathematiker Erich Hecke (1887-1947) untersuchte systematisch die Räume der Modulformen von Kongruenzuntergruppen, speziell von

$$\Gamma_0(m) = \{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{S}l_2(\mathbb{Z}); c \equiv 0 \pmod{m}\}$$

Als Nebentypus wird oft der auf  $\mathbb{Z}$  fortgesetzte quadratische Rest-Character  $\chi_D$  (Dirichlet-Charakter) verwendet, wobei  $D$  die absolute Diskriminante des

quadratischen Zahlkörpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  bezeichnet. Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der  $\Gamma_0(m)$ -Modulformen des Gewichts  $k$  vom Nebentypus  $\chi_D$  wird mit  $M_k(m, \chi_D)$  bezeichnet. Er hat stets endliche Dimension. Wir benötigen insbesondere die Diskriminante  $-4$  des Körpers  $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  der (arithmetischen) Gaußschen Zahlen. Die ersten 10 Primzahlwerte von  $\chi_4$  sind schnell zusammengestellt:

```
> matrix(2, 10, [Primzahl, seq(ithprime(k), k = 1..9),
  QuadRest, 0, seq((-1)^(ithprime(k)-1/2), k = 2..9)]);
```

Output:

```
( Primzahl  2  3  5  7  11  13  17  19  23 )
( QuadRest  0 -1  1 -1 -1  1  1 -1 -1 )
```

Längs des Restklassen-Homomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  wird diese erweiterte quadratische Rest-Zuordnung zu  $\chi = \chi_4$  geliftet. Mit Hilfe einer einfachen Prozedur können die  $\chi$ -Werte bestimmt werden:

```
> for n from 0 to 100 do
  if n = 2 or type(n/2, integer) then
    chi[n] := 0
  else chi[n] := (-1)^(n-1/2)
  end if
end do :
```

Die Charakter-Werte  $\chi(j)$  für  $j = 0..10$  sind folgender Matrix zu entnehmen:

```
> matrix(2, 12, [n, seq(j, j = 0..10), chi(n), seq(chi[j], j = 0..10)]);
```

Output:

```
( n  0  1  2  3  4  5  6  7  8 )
( chi(n)  0  1  0 -1  0  1  0 -1  0 )
```

Bei Koblitz [Ko] fand ich (auf klassische Arbeiten, mit Hauptbezug auf Jacobi, gestützt) den folgenden

**Fakt 1.** Die Funktion  $\vartheta^6(\tau)$  ist eine  $\Gamma_0(4)$ -Modulform vom Gewicht 3 und Nebentypus  $\chi = \chi_4$ :

$$\vartheta^6(\tau) \in M_3(4, \chi_4)$$

Nun benötigen wir eine weitere Modulform desselben Typs. Bei Koblitz [Ko], VI.1, wird man fündig. Ursprünglich muss man bei Hecke [He] nachsehen.

## 6 Hecke's und Cogdell's Theta-Reihen

Bei Hecke [He] findet man die Reihe

$$\theta(\tau) = \sum_{0 < u \text{ odd}} \sigma(u) \cdot q^u = q \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{4k})^4 (1 + q^{2k})^4$$

Wir überprüfen die (bekannte) Übereinstimmung beider Darstellungen anhand der ersten 10 Koeffizienten:

$$\begin{aligned} > \theta &:= \text{taylor}\left(\sum_{k=0}^{100} \sigma(2 \cdot k + 1) \cdot q^{2k+1}, q, 11\right); \text{VergleichsProbe}; \\ \text{Prod} &:= \text{taylor}\left(q \cdot \prod_{k=1}^{100} (1 - q^{4k})^4 \cdot (1 + q^{2k})^4, q, 11\right); \end{aligned}$$

Output:

$$\begin{aligned} \theta &= q + 4q^3 + 6q^5 + 8q^7 + 13q^9 + O(q^{11}) \\ &\quad \text{VergleichsProbe} \\ \text{Prod} &= q + 4q^3 + 6q^5 + 8q^7 + 13q^9 + O(q^{11}) \end{aligned}$$

**Fakt 2** ([Ko],IV.1). Die Funktion  $\vartheta^2 \cdot \theta$  ist eine  $\Gamma_0(4)$ -Modulform vom Gewicht 3 und Nebentypus  $\chi = \chi_4$ :

$$\vartheta^2 \cdot \theta(\tau) \in M_3(4, \chi_4)$$

**Fakt 3** (ebenda, Prop. 4). Die Modulformen  $\vartheta^6$  und  $\vartheta^2 \cdot \theta$  bilden eine Basis des Vektorraumes  $M_3(4, \chi_4)$ .

$$> \vartheta 2\theta := \text{taylor}(\vartheta^2 \cdot \theta, q, 100); \text{taylor}(\vartheta 2\theta, q, 11);$$

Output:

$$q + 4q^2 + 8q^3 + 16q^4 + 26q^5 + 32q^6 + 48q^7 + 64q^8 + 73q^9 + 104q^{10} + O(q^{11})$$

Mit Hilfe von geometrischen Schnitten der algebraischen Flächentheorie präsentierte in den 80-er Jahren der US-amerikanische Mathematiker J.W. Cogdell am Ende seiner Dissertation [Co] (unveröffentlicht) eine neue Modulform in  $M_3(4, \chi_4)$ . Sie setzt sich aus folgenden 2 Reihen mit elementaren Koeffizienten zusammen (für die Konstante  $c_0$  wurde eine Formel angegeben):

$$\begin{aligned} \text{Cog}_1 &= c_0 + \sum_{N=0}^{\infty} \left(N - \frac{1}{12}\right) \cdot K_N \cdot q^N, \quad \text{Cog}_2 = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=1}^N 2 \cdot \sigma(m) \cdot K_{N-m} \cdot q^N, \\ \text{Cog}(\tau) &= \text{Cog}_1(\tau) + \text{Cog}_2(\tau). \end{aligned}$$

MAPLE-Reihen:

$$\begin{aligned} > \text{Cog}_1 &:= \text{taylor}\left(c_0 + \sum_{R=1}^{10} (R - 1/12) \cdot K_R \cdot q^R, q, 11\right); \\ \text{Cog}_2 &:= \text{taylor}\left(\sum_{R=0}^{\infty} \sum_{m=1}^R 2 \cdot \sigma(m) \cdot K_{N-m} \cdot q^R, q, 11\right); \\ \text{Cog} &:= \text{taylor}(\text{Cog}_1 + \text{Cog}_2, q, 10); \end{aligned}$$

Output:

$$c_0 + \frac{17}{3}q + \frac{65}{3}q^2 + 40q^3 + \frac{257}{3}q^4 + \frac{442}{3}q^5 + 168q^6 + 240q^7 + \frac{1025}{3}q^8 + \frac{1241}{3}q^9 + O(q^{10})$$

Nach Fakt 3 muss  $Cog(\tau)$  Linearkombination von  $\vartheta^6$  und  $\vartheta^2 \cdot \theta$  sein. Explizit ergibt sie sich durch Vergleich der ersten zwei bekannten Koeffizienten der drei Reihen (derjenigen von  $q$  und  $q^2$ ). Die Lösung der beiden linearen Gleichungen mit zwei Unbestimmten ergibt den

## 7 Koeffizientenvergleich der Reihen

**Satz 3** Die Cogdell-Reihe hat die Theta-Darstellung

$$Cog = \frac{17}{3}\vartheta^2\theta - \frac{1}{12}\vartheta^6.$$

Speziell ergibt sich daraus auch die Konstante der Cogdell-Reihe:  $c_0 = -\frac{1}{12}$ .

**Korollar 4** Der Linearkombination

$$\vartheta^6 = 80 \cdot \vartheta^2 - 12 \cdot Cog$$

entnimmt man die gesuchten Relationen (1) zwischen den arithmetischen Ball- und Kreiszahlen.

**Beweis.** Zu Beginn des Artikels haben wir bereits diese Relation experimentell für  $N = 1..10$  überprüft. Wir wissen auch, dass man die  $B_N$  als  $q^N$ -Koeffizienten von der Theta-Reihe  $\vartheta^6$  ablesen kann. Wegen Fakt 3 existiert eine lineare Relation

$$c_0 + \frac{17}{3}q + \frac{65}{3}q^2 + \dots = Cog = x \cdot \vartheta^2\theta + y \cdot \vartheta^6 = x \cdot (q + 4q^2 + \dots) + y \cdot (1 + 12q + 60q^2 + \dots).$$

Die Unbestimmten berechnen wir aus dem linearen Gleichungssystem

$$x + 12y = \frac{17}{3} \quad , \quad 4x + 60y = \frac{65}{3}$$

$$> \text{with}(\text{LinearAlgebra}); A := \langle\langle 1, 4 \rangle, \langle 12, 60 \rangle\rangle; B := \langle\langle \frac{17}{3}, \frac{65}{3} \rangle\rangle;$$

$$\langle x, y \rangle = \text{LinearSolve}(A, B);$$

Output:

$$(x, y) = \left(\frac{20}{3}, -\frac{1}{12}\right)$$

Daraus ergibt sich die Konstante  $c_0 = -\frac{1}{12}$ :

$$> \text{taylor}\left(\frac{20}{3} \cdot \vartheta^2\theta - \frac{1}{12}\vartheta^6, q, 10\right); \text{VergleichMitCogdellReihe}; Cog$$

Output:

$$-\frac{1}{12} + \frac{17}{3}q + \frac{65}{3}q^2 + 40q^3 + \frac{257}{3}q^4 + \frac{442}{3}q^5 + 168q^6 + 240q^7 + \dots$$



VergleichMitCogdellReihe

$$c_0 + \frac{17}{3}q + \frac{65}{3}q^2 + 40q^3 + \frac{257}{3}q^4 + \frac{442}{3}q^5 + 168q^6 + 240q^7 + \dots$$

Mit diesem Vergleich endet der Beweis des Satzes.

q.e.d.

**Bemerkung 5** *Auf neue Weise wurde bestätigt, dass Cogdells Reihe tatsächlich eine Modulform aus  $M_3(4, \chi_4)$  ist (als Linearkombination zweier solcher). Cogdell hat sie mit Punktezählung auf Disks in komplexen 2-dimensionalen Kugel richtig aufgestellt.*

*Einen anderen Weg habe ich in [Ho1] eingeschlagen. Dort wird gezeigt, dass man die Reihe auch von endlich vielen Verzweigungszahlen in der projektiven komplexen Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ablesen kann, wenn man die Qualität der Theta-Reihen von Jacobi und Hecke kennt. In [Ho2] habe ich dargelegt, wie man dann die Koeffizienten zur Aufzählung der arithmetischen Kurven in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  nutzen kann. Diese spielen eine große Rolle bei den heutigen Digitalisierungsprozessen. Theoretisch stehen wir vor einem energischen Vorstoß mitten ins Herz des offenen 12. Hilbertschen Problems.*

## 8 Visualisierung und pythagoräische Aufgaben

Leider kann man den ganzzahligen Lösungsbefehl `isolve(x2 + y2 = 65)`, siehe dritte Seite, nicht direkt zum Visualisieren mit Hilfe des `Plot`-Befehls verwenden. Man kriegt nämlich folgenden Output:

$$\begin{aligned} &\{x = -8, y = -1\}, \{x = -8, y = 1\}, \{x = -7, y = -4\}, \{x = -7, y = 4\}, \\ &\{x = -4, y = -7\}, \{x = -4, y = 7\}, \{x = -1, y = -8\}, \{x = -1, y = 8\}, \\ &\{x = 1, y = -8\}, \{x = 1, y = 8\}, \{x = 4, y = -7\}, \{x = 4, y = 7\}, \\ &\{x = 7, y = -4\}, \{x = 7, y = 4\}, \{x = 8, y = -1\}, \{x = 8, y = 1\} \end{aligned}$$

Wir brauchen aber die Lösungspaare, z.B. [4,7]. Diese liefert uns der folgende primitive Algorithmus. Der erste Schritt sortiert die natürlichen  $x$ -Werte aus, die in den Lösungspaaren vorkommen. Den anderen  $0 \leq x \leq \sqrt{N}$  wird aus Anordnungsgründen der Wert  $\infty$  verpasst.

`> N := 65 :`

`for n from 0 to floor(sqrt(N)) do`

`if type(sqrt(N - n2), integer) then`

`Nr[n] := n : y[n] := sqrt(N - n2) else`

`Nr[n] := ∞ :`

`end if :`

`end do :`

`S := seq(Nr[k], k = 0..floor(sqrt(N)))`

Output:

$$S := [1, 4, 7, 8, \infty, \infty, \infty, \infty]$$

Die vollständige  $Nr$ -Folge  $S$  wird verkürzt zur Teilfolge  $s$ , die sich auf die endlichen Werte beschränkt;  $J_N$  speichert die Länge, die mit der Anzahl der Kreispunkte mit natürlichen Koordinaten übereinstimmt:

```
> for j from 1 to floor(sqrt(N)) while S[j] < infinity
do s[j] := S[j] end do; J[N] := j - 1;
```

Die Koordinaten der Lösungen von  $x^2 + y^2 = 65$  bilden zwei Folgen:

$$> X := seq(s_k, k = 1..J_N); Y := seq(\sqrt{N - s_k^2}, k = 1..J_N) :$$

Output (z.B.):

$$X := 1, 4, 7, 8$$

Die Lösungspaare können jetzt in die Spalten der Matrix gestellt werden, von wo aus sie leicht für die Visualisierung auf dem Kreis abrufbar sind, was wir bereits nach Bemerkung 1 getan haben.

$$> M := matrix(2, 4 \cdot J[N], [X, -X, X, -X, Y, Y, -Y, -Y])$$

Output:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 & -1 & -4 & -7 & -8 & 1 & 4 & 7 & 8 & -1 & -4 & -7 & -8 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 8 & 7 & 4 & 1 & -8 & -7 & -4 & -1 & -8 & -7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Plotbefehl ist nun einfach:

```
>with(plots) : with(plottools) :
P := seq([M[1, k], M[2, k]], k = 1..4 \cdot J[N]); pointplot(P)
```

Man kann nun auch leicht den Radius ändern, und Rechnung wie Zeichnung für jeden Kreis mit Wurzelradius  $\sqrt{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  durchführen.

Schulnahe Übungen:

- 1.) Ein Tripel  $(f, g, h)$  natürlicher Zahlen heißt *pythagoräisch* genau dann, wenn  $f^2 + g^2 = h^2$ .
  - a) Finde alle pythagoräischen Tripel mit  $f, g, h \leq 20$ .
  - b) Bestimme mit Hilfe der  $\vartheta$ -Reihe die Anzahl dieser Tripel.
- 2.) a) Man finde alle ganzzahligen Punkte des reellen 3-dimensionalen Balles mit kleinem Radius  $\sqrt{N} < 8$ , d.h. die  $\mathbb{Z}$ -Lösungen von

$$x^2 + y^2 + z^2 = N, N < 64.$$

- b) Bestimme mit Hilfe der  $\vartheta$ -Reihe die Anzahl dieser Lösungen.

Tip zu 1 b), 2 b): Siehe Bemerkung 2 am Ende von Abschnitt 4.

## References

- [BF] Busam, R., Freitag E., *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch, Berlin, 1993
- [Co] Cogdell, J.W. *Arithmetic cycles on quotients of the complex 2-ball and modular forms*, Thesis, Rutgers Univ., New Brunswick (NJ), 1982
- [Ko] Koblitz, N., *Introduction to elliptic curves and modular forms*, Grad. Texts in Math. **97**, Springer 1984
- [Ho1] Holzapfel, R.-P., *Enumerative Geometry for complex geodesics on quasi-hyperbolic 4-spaces with cusps*, Proc. Conf. Varna 2002, In: *Geometry, Integrability and Quantization*, ed. by M. Mladenov, L. Naber, Sofia 2003, 42 - 87
- [Ho2] Holzapfel, R.-P., *Relative proportionality on Picard- and Hilbert modular surfaces*, In: [HUY]
- [HUY] Holzapfel, R.-P., Uludag, A.M., Yoshida, M. (ed.), *Arithmetic and Geometry Around Hypergeometric Functions*, Lecture notes of a CIMPA Summer School 2005, Birkhäuser, 2007
- Hintergründe:
- [HZ] Hirzebruch, F., Zagier, D., *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus*, *Inv. math.* **36** (1976), 57 - 113
- [He] Hecke, E., *Mathematische Werke*, Vandenhoeck u. Ruprecht, 1970, 2. Aufl.